

Uniwersytet  
Ekonomiczny  
w Krakowie

# Zeszyty Naukowe

Cracow Review  
of Economics  
and Management

904

## Metody analizy danych

Kraków 2013

#### Rada Naukowa

*Andrzej Antoszewski (Polska), Slavko Arsovski (Serbia), Josef Arlt (Czechy), Daniel Baier (Niemcy), Hans-Hermann Bock (Niemcy), Ryszard Borowiecki (Polska), Giovanni Lagioia (Włochy), Tadeusz Markowski (Polska), Martin Mizla (Słowacja), David Ost (USA), Józef Pocięcha (Polska)*

#### Komitet Redakcyjny

*Paweł Lula, Barbara Pawełek (sekretarz), Adam Sagan, Tadeusz Sikora, Edward Smaga, Andrzej Sokołowski (przewodniczący)*

#### Redaktor statystyczny

*Andrzej Sokołowski*

#### Redaktor Wydawnictwa

*Joanna Kalas*

#### Projekt okładki i układ graficzny tekstu

*Marcin Sokołowski*

Streszczenia artykułów są dostępne w międzynarodowej bazie danych The Central European Journal of Social Sciences and Humanities <http://cejsh.icm.edu.pl> oraz w Central and Eastern European Online Library [www.ceeol.com](http://www.ceeol.com), a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych i pokrewnych BazEkon [http://kangur.uek.krakow.pl/bazy\\_ae/bazekon/nowy/index.php](http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php)

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Kraków 2013

ISSN 1898-6447

Wersja pierwotna: publikacja drukowana  
Publikacja jest dostępna w bazie CEEOL ([www.ceeol.com](http://www.ceeol.com))  
oraz w czytelniku on-line [ibuk.pl](http://www.ibuk.pl) ([www.ibuk.pl](http://www.ibuk.pl))

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie  
31-510 Kraków, ul. Rakowicka 27, tel. 12 293 57 42, e-mail: [wydaw@uek.krakow.pl](mailto:wydaw@uek.krakow.pl)  
[www.zeszyty-naukowe.uek.krakow.pl](http://www.zeszyty-naukowe.uek.krakow.pl)

Zakład Poligraficzny Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie  
31-510 Kraków, ul. Rakowicka 27

Objętość 4,9 ark. wyd.  
Zam. 140/2013

# Spis treści

Adam Sagan, Eugeniusz Kąciak

**Analiza struktury łańcuchów środków-celów w skróconych wywiadach drabinkowych** ..... 5

Renata Wróbel-Rotter

**Estymowane modele równowagi ogólnej: zastosowanie metody dekompozycji funkcji do oceny zależności między parametrami postaci strukturalnej i zredukowanej** ..... 19

Marcin Salamaga

**Badanie konkurencyjności polskiego eksportu z wykorzystaniem skorygowanego wskaźnika przewagi komparatywnej** ..... 37

Paweł Najman

**Domknięcie i stabilność Bondy’ego-Chvátala grafów zwykłych – idee, formalizacje, uzupełnienia** ..... 53

Marcin Stanisław Niedużak

**Badanie występowania transakcji z wykorzystaniem informacji poufnych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie** ..... 71



*Adam Sagan*

Katedra Analizy Rynku i Badań Marketingowych  
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

*Eugeniusz Kąciak*

Department of Finance, Operations and Information Systems  
Brock University, Kanada

# Analiza struktury łańcuchów środków-celów w skróconych wywiadach drabinkowych

## Streszczenie

W artykule przedstawiono nowy sposób oceny jakości drabinek tworzonych przez respondentów w czasie wywiadu ladderingowego, uwzględniający różnice zarówno w kolejności czasowej, jak i w częstotliwości ich tworzenia przez respondentów. Wprowadzono wskaźnik tzw. centralności drabinek oparty na znanym w analizie dziedziny kulturowej wskaźniku Smitha. Ponadto zaproponowano nową metodę analizy danych ladderingowych za pomocą asymetrycznej analizy korespondencji sumarycznej macierzy drabinek. Jej zastosowanie pozwala otrzymać dodatkową informację na temat dominujących wymiarów w strukturze łańcuchów środków-celów, a także wyznaczyć drabinki prominentne o największym wkładzie w bezwładność układu.

**Słowa kluczowe:** podejście środków-celów, wywiad drabinkowy, asymetryczna analiza korespondencji, optymalizacja struktury drabinek.

## 1. Wprowadzenie

Jednym z podstawowych zagadnień związanych z analizą zachowań konsumenta jest identyfikacja motywów jego postępowania i czynników kształtujących

wybory produktów. Szczególną rolę odgrywa tutaj głębsza znajomość struktur poznawczo-motywacyjnych konsumentów wynikających z jednej strony z ich wartości osobowych (czynniki typu *push* – wypychania), z drugiej zaś ze struktury i siły oddziaływania bodźców zewnętrznych związanych z cechami produktu i korzyściami z niego wynikającymi, z reklamą i z innymi formami oddziaływania na konsumenta (czynniki typu *pull* – przyciągania) [Olson i Reynolds 2001]. Ta procedura jest zgodna z sugestiami J. Gutmana [1982], który podkreśla, że do podstawowych czynników indywidualnych wyborów produktów należą wartości osobowe konsumentów, a podejściem badawczym, które pozwala na identyfikację tych zależności, jest wywiad drabinkowy (*laddering*), związany z podejściem środków-celów (*means-end*). Wyczerpujący przegląd założeń tego podejścia znajduje się w pracy T.J. Reynoldsa i J.M. Phillips [2008]. Wywiad drabinkowy jest charakteryzowany jako technika badań jakościowych oparta na założeniu, że wybory konsumentów odzwierciedlają relacje między cechami produktu, konsekwencjami ich wyboru oraz strukturą pożądaných celów konsumenta odpowiadającą jego systemowi wartości. Celem wywiadu drabinkowego jest odkrycie sieci znaczeń konsumenta [Reynolds i Phillips 2008], które wiążą hierarchiczne układy cech, konsekwencji i wartości osobowych (*attributes-consequences-values* lub w skrócie A-C-V).

W ocenie jakości drabinek A-C-V stosowane są zarówno podejścia eksploracyjne, jak i modelowe. Do pierwszych należą: klasyczne mapy wartości konsumenta (*hierarchical value map* – HVM), analiza korespondencji, skalowanie wielowymiarowe, analiza sieci społecznych, analiza czynnikowa i ograniczona analiza skupień. Zastosowanie tych metod pozwala na redukcję złożoności powiązań w łańcuchach środków-celów i identyfikację ukrytych wzorów powiązań, nadmiarowych łańcuchów. W podejściach modelowych stosowana jest analiza log-liniowa i liniowe modele strukturalne w celu oceny jakości dopasowania modeli łańcuchów do istniejących powiązań w danych [Sagan 2004].

Ta dualność podejść wywołuje wiele sporów metodologicznych (zob. [Phillips i Reynolds 2009]). Jednym z bardziej istotnych jest problem relacji między długością łańcuchów środków-celów a jakością uzyskiwanych drabinek. W tradycyjnym podejściu przyjmuje się założenie jednorodności drabinek z perspektywy zdolności odzwierciedlania przez nie rzeczywistych struktur poznawczo-motywacyjnych konsumenta. Tymczasem jakość otrzymywanych drabinek może zależeć od tego, w którym momencie badania zostały one podane przez respondenta – na początku czy też pod jego koniec. Jak wskazują E. Kąciak i C.W. Cullen [2009], im dłuższy jest proces wywiadu i większa wielorakość drabinek, tym niższa jest jakość łańcuchów uzyskiwanych pod koniec badania. Zaproponowali oni w związku z tym metodę skrócenia wywiadu drabinkowego bez istotnej zmiany liczby uzyskiwanych drabinek generowanych przez respondentów w trakcie

wywiadu. Ta metoda skrócenia „twardego” wywiadu z jednoczesną kontrolą ilości traconej informacji jest związana z formatem wywiadu typu  $3 \times (1 + 3 + 3 \times 3)$ . Oznacza to, że: 1) respondent przedstawia cechę produktu, która jest najważniejszym kryterium wyboru, 2) wskazuje najwyżej trzy konsekwencje wynikające z wyboru tej cechy, 3) dla każdej z tych trzech konsekwencji wyboru respondent wskazuje najwyżej trzy powody ważności, dla których te konsekwencje zostały wyróżnione. Proces ten jest powtarzany dwa razy oddzielnie dla każdej kolejnej cechy. Pełna wersja tego wywiadu może być opisana następująco: drabinki środków-celów wynikające z procedury wywiadu mają postać  $(p, k, m)$ , gdzie  $p$  oznacza daną cechę,  $k$  – związaną z nią konsekwencję wyboru, a  $m$  – powód ważności tej konsekwencji. Zupełny zbiór sekwencji uzyskanej na podstawie pierwszej cechy może być opisany za pomocą następującej kombinacji trójek: (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 1), (1, 3, 2), (1, 3, 3), co daje w sumie maksymalną liczbę 27 pozycji (trójek) dla trzech analizowanych cech. Skrócona wersja tej procedury wykorzystuje jedynie 7 (z 27) pozycji: (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (3, 1, 1), a jednocześnie pozwala na uzyskanie z reguły ok. 80% drabinek tworzonych przy zastosowaniu pełnej procedury wywiadu<sup>1</sup>. Co więcej, dodanie jeszcze 5 pozycji: (1, 2, 2), (1, 3, 1), (3, 1, 2), (1, 1, 3), (3, 2, 1) pozwala na uzyskanie aż 95% wszystkich drabinek pojawiających się w wywiadach.

W artykule przedstawiono nowy sposób oceny jakości drabinek, uwzględniający wskazane różnicowania, w części oparty na opisanym podejściu zaproponowanym przez E. Kąciaka i C.W. Cullena [2009], rozwiniętym następnie przez E. Kąciaka, C.W. Cullena i A. Sagana [2010]. Wprowadzono wskaźnik tzw. centralności drabinek oraz nową metodę analizy danych ladderingowych za pomocą asymetrycznej analizy korespondencji sumarycznej macierzy drabinek.

## 2. Jakość drabinek w skróconej wersji wywiadu ladderingowego

Metody gromadzenia danych i identyfikacji łańcuchów środków-celów w wywiadach drabinkowych można podzielić na dwie podstawowe grupy: wywiady „miękkie” (*soft laddering*), które stanowią tradycyjne, jakościowe podejście, oraz wywiady „twarde” (*hard laddering*), częściej wykorzystywane w badaniach ilościowych z wykorzystaniem narzędzi standaryzowanych [Grunert i Grunert 1995].

W celu uproszczenia procesu badania powstało wiele technik częściowo strukturalizowanego wywiadu drabinkowego. Należą do nich: a) technika bloków

---

<sup>1</sup> Wynik ten jest zadziwiająco zgodny ze znaną regułą Pareta 20–80.

i strzałek, b) sortowania kart, c) werbalnych skal ocen (skal Likerta), d) skal ocen profili produktu, e) wzorów powiązań (APT). W porównaniu z „miękkim” wywiadem drabinkowym cechują się one niższą trafnością wewnętrzną, ale zwykle są mniej angażujące emocjonalnie i skracają istotnie czas prowadzenia wywiadu. Najbardziej popularna technika bloków i strzałek generalnie dostarcza bardzo zróżnicowanych i rozproszonych odpowiedzi.

Procedura opisana we wprowadzeniu jest skoncentrowana na problemie liczby drabinek generowanych w trakcie prowadzenia wywiadu. Zwykle skrócenie wywiadu prowadzi do nieznacznego zmniejszenia liczby uzyskiwanych drabinek. Drugim problemem do rozwiązania pozostaje wspomniana już jakość łańcuchów środków-celów uzyskiwanych na podstawie wywiadu skróconego.

Cechą charakterystyczną „twardego” wywiadu drabinkowego jest jego efektywność czasowa i kosztowa. Wywiady tego typu pozwalają na uzyskanie informacji o łańcuchach środków-celów konsumenta zwykle o wiele szybciej i taniej w porównaniu z jakościowym „miękkim” wywiadem drabinkowym [ter Hofstede, Steenkamp i Wedel 1999, Phillips i Reynolds 2009], lecz jednocześnie jakość, bogactwo i znaczenie drabinek są uznawane za niższe w stosunku do klasycznych miękkich form [Phillips i Reynolds 2009, s. 88].

Jak wcześniej zaznaczono, ocena jakości uzyskiwanych drabinek związana jest zwykle z przyjęciem założenia o ich jednorodności. T.J. Reynolds i J.M. Phillips [2008] sugerują określenie poziomu ich jakości przez ocenę relacji między liczbą możliwych drabinek (np. drabinek obejmujących wszystkie poziomy badanych kategorii) w stosunku do wszystkich drabinek uzyskanych w trakcie danego wywiadu. Z kolei we wspomnianej propozycji przedstawionej w artykule E. Kąciaka, C.W. Cullena i A. Sagana [2010] podkreślono nieco inny aspekt jakości drabinek związany z analizą tzw. drabinek prominentnych<sup>2</sup>. Analiza ta została przeprowadzona na podstawie danych uzyskanych w realizacji „twardych” wywiadów na temat oceny struktur poznawczych i motywacyjnych związanych z paleniem papierosów. Dane uzyskano na podstawie próby kwotowej  $n = 421$  polskich palaczy z wykorzystaniem kwestionariusza o formacie  $3 \times (1 + 3 + 3 \times 3)$ . Liczba drabinek uzyskanych w wywiadzie wynosiła 1828 pozycji.

### 3. Ocena jakości drabinek prominentnych

Najbardziej popularną metodą analizy i prezentacji wyników wywiadów drabinkowych jest hierarchiczna mapa wartości (HVM) zaproponowana w pracy T.J. Reynoldsa i J. Gutmana [1988]. Hierarchiczna mapa wartości jest graficznym

---

<sup>2</sup> Są to najważniejsze układy zależności cech, konsekwencji i wartości.



przedstawieniem najbardziej znaczących relacji (najczęściej takich, które przekraczają określony odsetek częstości, np. 5–10% w próbie) między cechami, konsekwencjami i wartościami. Podstawą budowy mapy jest rozkład powiązań między kategoriami A, C i V odzwierciedlony w tzw. sumarycznej macierzy implikacji (*summary implication matrix* – SIM) [Reynolds i Gutman 1988].

Próg odcięcia (*cut-off level*) określa, ile diadycznych połączeń między parami A-C, C-V i A-V będzie reprezentowanych na mapie. Mapa tego rodzaju przedstawia nie tylko diadyczne powiązania między cechami, konsekwencjami i wartościami, ale również drabinki między trzema poziomami analizy (A-C-V). T.J. Reynolds [2006] podkreśla, że informacja na temat struktury drabinek zawarta na mapie wartości jest istotna z perspektywy strategii marketingowych, a w szczególności segmentacji rynku. Nie wszystkie drabinki widoczne na mapie są istotne z merytorycznego i marketingowego punktu widzenia. Największe znaczenie mają tzw. drabinki prominentne, czyli te, które są wyodrębniane przez określoną liczbę respondentów (znajdujących się powyżej progu odcięcia). Ze względu na to, że łańcuchy środków-celów składają się co najmniej z trzech kategorii, trudniej jest przekroczyć restrykcyjną granicę, np. 8%, łańcuchom triadycznym niż diadycznym kombinacjom powiązań A-C, C-V lub A-V. Z tego powodu próg odcięcia dla łańcuchów triadycznych jest nieco bardziej liberalny i wynosi ok. 5%. Po drugie, identyfikacja relacji triadycznych A-C-V na podstawie diadycznych układów relacji w macierzy implikacji jest niemożliwa, zawiera ona bowiem informacje jedynie o parach relacji między określonymi kategoriami łańcucha. E. Kąciak i C.W. Cullen [2006] zaproponowali w związku z tym metodę oceny współwystępowania triadycznych powiązań między kategoriami łańcucha i prezentacji tych relacji w tzw. sumarycznej macierzy drabinek (*summary ladder matrix* – SLM).

Porównanie drabinek znajdujących się na mapie wartości HVM (uzyskanej za pomocą SIM) i układów triadycznych w SLM pozwala na identyfikację drabinek prominentnych, tj. przekraczających próg odcięcia 5%. W wyniku można również określić frakcję drabinek prominentnych, która została utracona wskutek zastosowania skróconej wersji wywiadu.

E. Kąciak i C.W. Cullen [2009] posortowali drabinki prominentne  $A_i C_j V_k$  ze względu na częstość ich wyboru przez respondentów (od najbardziej do najmniej popularnej) i wykazali, że pozycje (triady elementów A-C-V) od 1 do 7 (najczęściej wyodrębniane pozycje w skróconej procedurze wywiadu drabinkowego) generują 1072 drabinki prominentne – czyli ok. 87% wszystkich tego rodzaju drabinek spośród 1222 drabinek uzyskanych w tej procedurze przez 421 respondentów<sup>3</sup>. Pozycje kwestionariusza, które generują te drabinki, obejmują 7 łańcuchów triadycznych: (1, 1, 1), (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2), (2, 1, 2), (3, 1, 1) i (2, 2, 1).

<sup>3</sup> Badania empiryczne dotyczące motywów palenia papierosów zostały przeprowadzone za pomocą „twardego” wywiadu drabinkowego na kwotowej próbie mieszkańców Krakowa.

Tylko około 150 prominentnych drabinek (12,3%) zostało utraconych poprzez zastosowanie skróconej wersji wywiadu drabinkowego. Uwzględnienie dodatkowych 5 pozycji kwestionariusza: (1, 2, 2), (1, 3, 1), (3, 1, 2), (1, 1, 3) i (3, 2, 1) pozwala na zmniejszenie liczby brakujących drabinek prominentnych do 24 (co stanowi tylko 1,96% tego rodzaju drabinek).

#### 4. Wskaźniki centralności drabinek prominentnych

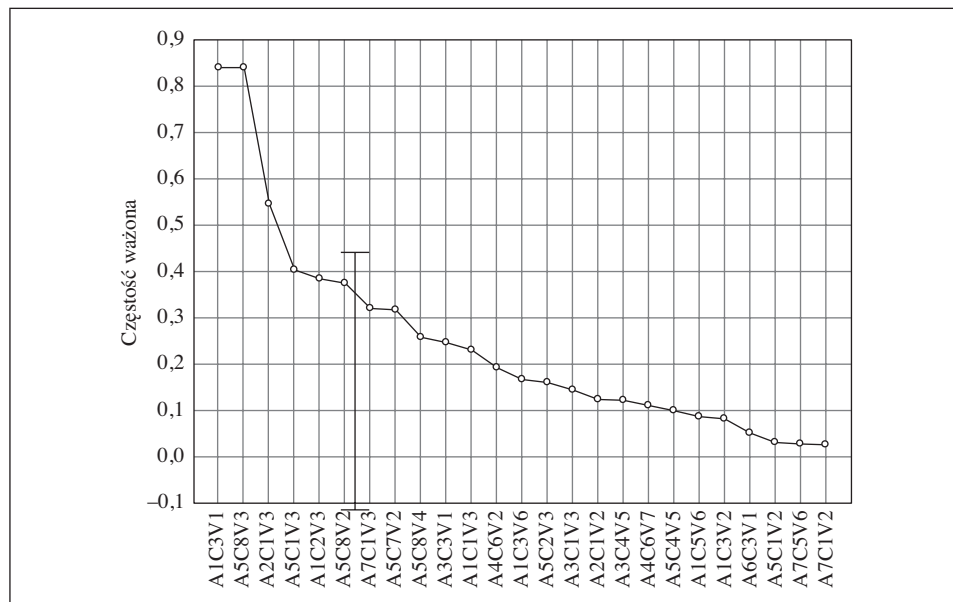
Bardziej szczegółowa analiza jakości drabinek uzyskanych za pomocą skróconej wersji wywiadu drabinkowego pozwala na uwzględnienie współczynnika świadomości drabinek (*top-of-mind awareness* – TMA) zaproponowanego przez E. Kąciaka, C.W. Cullena i A. Sagana [2010]. Jak wskazują badania nad postawami utrwalonymi przeprowadzone przez I. Ajzena i M. Fishbeina [1980], T. Bech-Larsena i N.A. Nielsena [1999], A.G. Woodside'a i R.J. Trappeya [1992], generalnie konsumenci podejmują decyzje o zakupie produktów na podstawie pierwszych 5–8 kategorii, które stanowią ich centralne i utrwalone przekonania (*salient beliefs*) dotyczące tych produktów. Przy tym założeniu stosowane są często wskaźniki świadomości marki w badaniach reklamy i skuteczności komunikacji [Axelrod 1968]. Kolejne uświadamiane kategorie i kryteria wyboru produktu, które konsumenci wyodrębniają w ramach danej struktury poznawczej, są już mniej istotne w kształtowaniu postaw i przekonań wobec marek.

W celu wyodrębnienia wskaźników TMA dla każdego respondenta E. Kąciak, C.W. Cullen i A. Sagan [2010] opracowali prosty ranking kolejności wyodrębnianych przez niego drabinek. Liczba drabinek wyodrębnianych przez jednego respondenta mieściła się w przedziale od 1 do 11. Dla każdej prominentnej drabinki zostały obliczone wskaźniki TMA na podstawie kolejności w rankingu pojawienia się w strukturze drabinek respondenta. Struktura drabinek została podzielona na trzy podstawowe grupy: pozycje 1–7, pozycje 8–12 oraz grupa pozycji 13–27.

Autorzy ci [2010] pokazali, że każdy ze współczynników TMA dla pozycji 1–7 jest mniejszy niż 4 (przy przeciętnej wartości współczynnika TMA dla tych pozycji równej 2,76). Wynik ten wskazuje, że najbardziej prominentne drabinki tworzone przez te pozycje były wskazywane przez respondentów na pierwszym, drugim lub najwyżej trzecim miejscu. Szczegółowa analiza dostarcza informacji, że wśród 1072 drabinek tworzonych przez pozycje od 1 do 7 istniały 333 drabinki wskazywane przez badanych jako pierwszy wybór (ranga 1), 225 drabinek z rangą 2, 189 z rangą 3, 109 z rangą 4. Pozycje od 8 do 12 pozwoliły na uzyskanie dodatkowych 126 drabinek, ale w odróżnieniu od poprzednich nie ma tam drabinek z rangą 1 lub 2. Najwyższy wskaźnik rangowy dla 42 drabinek to

ranga 3, natomiast dla 33 drabinek – 4. Ogólny współczynnik TMA dla wszystkich prominentnych drabinek w tej grupie wynosił 4,71.

W trzeciej grupie (pozycje 13 do 27) dodane zostały kolejne 24 drabinki. Żadna z nich nie została umieszczona na 1, 2 lub 3 miejscu. Jedynie trzy drabinki były ujawnione na miejscu 4, sześć drabinek na miejscu 5 i pięć na miejscu 6. Całkowity wskaźnik TMA w tej grupie dla ogólnej liczby drabinek wynosił 6,33.



Rys. 1. Wykres ospyiska ważonej częstości łańcuchów A-C-V

Źródło: opracowanie własne.

Jako uzupełnienie przedstawionego podejścia E. Kąciaka, C.W. Cullena i A. Sagana [2010] do analizy i oceny jakości drabinek, w tym artykule proponujemy wykorzystanie znanego indeksu centralności (w analizie dziedziny kulturowej jest on znany jako wskaźnik Smitha). W wypadku danych ladderingowych wskaźnik ten pozwala uwzględnić w sposób syntetyczny zarówno częstość pojawiania się poszczególnych drabinek A-C-V, jak i ich ranking w strukturze łańcuchów środków-celów. Należy obliczać go jako ważoną częstość pojawiania się triad złożonych z cech, konsekwencji i wartości osobowych. Dla drabinkowych danych indywidualnych wskaźnik ten można wyrazić za pomocą następującego wzoru:

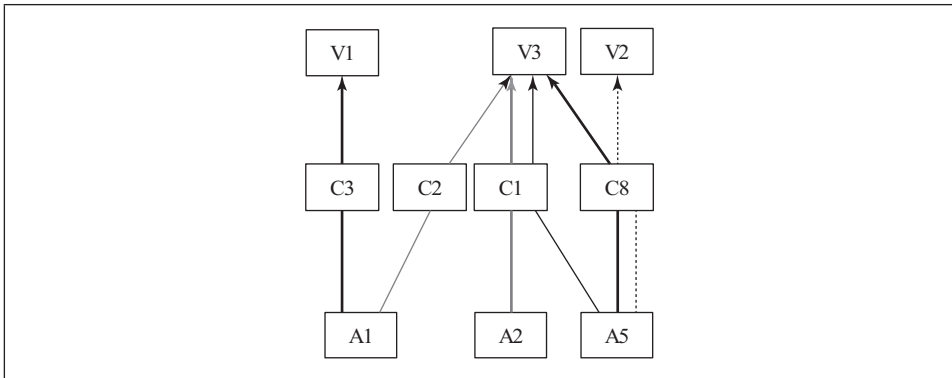
$$S_j = \frac{n - r_j + 1}{n}, \quad (1)$$

gdzie:

- $n$  – liczba ujawnionych drabinek (tutaj od 1 do 11) dla danego respondenta,  
 $r_j$  – miejsce danej drabinki w indywidualnym rankingu.

Rys. 1 przedstawia „wykres osypiska” ważonej częstości pojawiania się poszczególnych trójek wśród respondentów.

Na podstawie wykresu osypiska można wyróżnić w strukturze prominentnych drabinek układy „rdzeniowe” i „peryferyjne”. Do tych pierwszych należą łańcuchy: A1C3V1, A5C8V3, A2C1V3, A5C1V3, A1C2V3 oraz A5C8V3. Struktura tych drabinek została przedstawiona na rys. 2. Wynika z niego, że elementami centralnymi w strukturze poznawczo-motywacyjnej palacza papierosów są troska o małą szkodliwość papierosa, skuteczność w samokontroli własnego działania (zabijania głodu nikotynowego) oraz wartości hedonistyczne związane z przyjemnością palenia smacznych papierosów.



Oznaczenia: V1 – zdrowie, V2 – samosterowność, V3 – hedonizm, C1 – odczucie przyjemności, C2 – lepsze samopoczucie fizyczne, C3 – mniejsze szkody dla zdrowia, C8 – zabijanie głodu nikotynowego, A1 – ładne, A2 – smaczne, A5 – mocne.

Rys. 2. Struktura centralnych drabinek prominentnych

Źródło: opracowanie własne.

Rezultaty przedstawionych analiz wskazują, że metoda skróconego wywiadu drabinkowego charakteryzuje się niskim stopniem utraty informacji – wynikającej ze wskaźników TMA – i tym samym utraty prominentnych drabinek, które występowałyby w pełnej wersji wywiadu. Dodatkowo należy zauważyć, że największa liczba drabinek o wysokim wskaźniku TMA jest generowana w końcowych fazach wywiadu, stąd eliminowanie tych drabinek również przyczynia się do podniesienia jakości danych w realizacji wywiadu drabinkowego.

## 5. Asymetryczna analiza korespondencji w ocenie sumarycznej macierzy drabinek (SLM)

Jak zaznaczono we wprowadzeniu, drugim celem tego artykułu jest proponowanie metody analizy rozkładów relacji między elementami łańcucha środków-celów opartej na analizie korespondencji tabeli (tabela 1) uzyskanej po pewnym przekształceniu macierzy drabinek SLM. Tabela ta jest skondensowaną wersją macierzy SLM i przedstawia częstość występowania poszczególnych drabinek prominentnych A-C-V w opisywanym badaniu polskich palaczy.

Tabela 1. Tabela częstości drabinek prominentnych (powyżej progu odcięcia)

Pozycje	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
C1 V2	0	30	20	0	23	0	21
C1 V3	29	77	48	0	52	0	69
C1 V6	0	0	0	0	0	0	13
C2 V3	33	16	0	0	22	0	0
C2 V4	0	0	0	0	18	0	0
C3 V1	138	0	42	0	0	42	0
C3 V6	30	0	0	0	0	0	0
C4 V2	0	0	16	0	0	0	0
C4 V5	0	0	69	0	24	0	0
C5 V6	0	0	0	0	0	0	47
C6 V1	0	0	11	0	0	0	0
C6 V2	0	0	0	107	0	0	0
C6 V6	31	0	0	0	0	0	0
C6 V7	0	0	0	83	0	0	0
C7 V1	0	0	0	0	13	0	0
C7 V2	0	0	0	0	32	0	0
C7 V7	0	0	0	0	15	0	0

Źródło: [Kąciak, Cullen i Sagan 2010].

Zastosowanie asymetrycznej analizy korespondencji (zamiast bardziej znanej jej klasycznej wersji) do analizy danych zawartych w tabeli 1 zostało podyktowane asymetrią zależności między jej wierszami i kolumnami<sup>4</sup>. W analizowanych triadach wartości i konsekwencje psychospołeczne (odnoszące się do poziomu motywów konsumenta) wynikają z postrzeganych cech papierosów (jest to zało-

<sup>4</sup> Zob. [D'Ambra i Lauro 1992, Kroonenberg i Lombardo 1999].

żenie metod drabinkowych: cechy prowadzą do konsekwencji i wartości). Wynika to z założenia, że kategorie kolumnowe (cechy papierosów) wpływają na kategorie wierszowe (konsekwencje i wartości) w tabeli korespondencji.

Celem asymetrycznej analizy korespondencji jest przedstawienie zależności między kategoriami wierszowymi (kolumnowymi) zmiennej zależnej a kategoriami kolumnowymi (wierszowymi) dla zmiennej przyjętej jako niezależna (predyktor) w układzie o zredukowanej liczbie wymiarów w sposób, który maksymalizuje moc predykcyjną danej zmiennej niezależnej.

Struktura wartości własnych została przedstawiona w tabeli 2.

Tabela 2. Struktura wartości własnych tabeli korespondencji

Wartości własne i wyjaśniona bezwładność	Wymiary					
	F1	F2	F3	F4	F5	F6
Wartość własna	0,094	0,088	0,022	0,011	0,008	0,003
Zależność wierszowo-kolumnowa (%)	41,63	39,01	9,60	5,08	3,43	1,25
Skumulowany %	41,634	80,647	90,246	95,327	98,754	100,000

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3. Proporcjonalny wkład osi w predykcję zmiennych zależnych

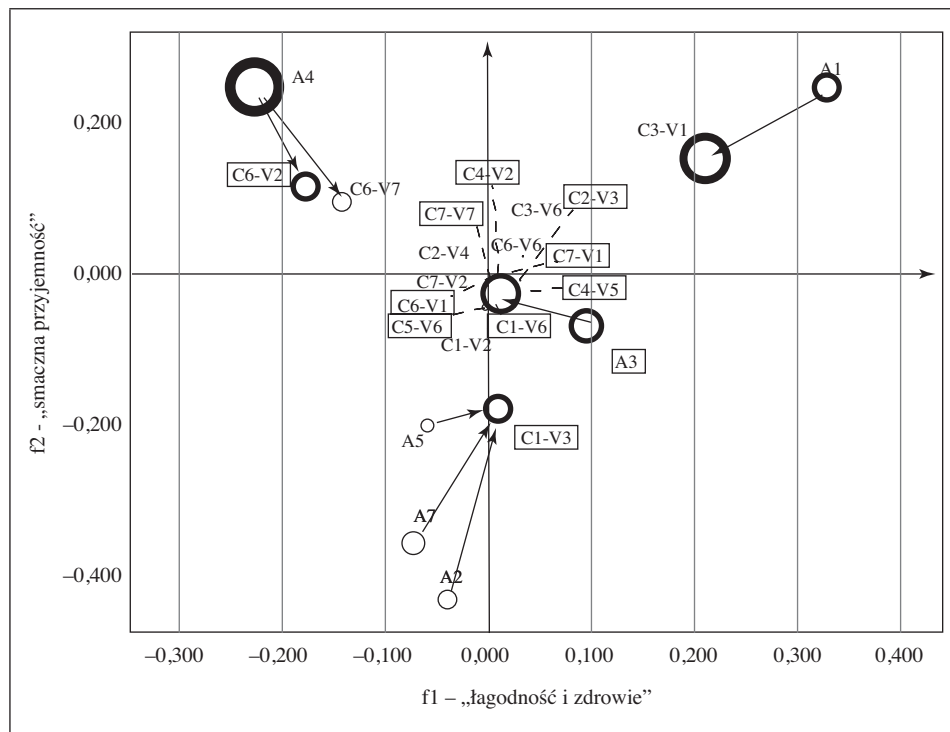
C-V	Wymiar 1	Wymiar 2	Wymiar 3	Wymiar 4	Wymiar 5	Wymiar 6
C1V2	0,00	0,89	0,00	0,00	0,07	0,03
C1V3	0,00	0,88	0,06	0,00	0,05	0,00
C1V6	0,00	0,20	0,25	0,33	0,22	0,00
C2V3	0,18	0,02	0,04	0,70	0,01	0,05
C2V4	0,00	0,09	0,13	0,41	0,26	0,09
C3V1	0,64	0,34	0,01	0,00	0,01	0,00
C3V6	0,33	0,19	0,01	0,00	0,00	0,31
C4V2	0,02	0,01	0,01	0,26	0,06	0,03
C4V5	0,01	0,05	0,85	0,08	0,00	0,00
C5V6	0,00	0,20	0,25	0,33	0,22	0,00
C6V1	0,02	0,01	0,61	0,25	0,06	0,03
C6V2	0,68	0,30	0,00	0,00	0,01	0,00
C6V6	0,33	0,19	0,08	0,00	0,01	0,00
C6V7	0,68	0,30	0,01	0,00	0,00	0,00
C7V1	0,00	0,09	0,13	0,41	0,26	0,09
C7V2	0,00	0,09	0,13	0,41	0,26	0,09
C7V7	0,00	0,09	0,13	0,42	0,26	0,09

Źródło: opracowanie własne.

Jak wynika z tabeli 2, pierwsze dwa wymiary wyjaśniają ponad 80% bezwładności. Wprowadzenie do analizy dodatkowego, trzeciego wymiaru w niewielkim stopniu przyczynia się do wzrostu wyjaśnianej inercji układu (szczególnie w porównaniu z przeciętną wyjaśnianą bezwładnością przypadającą na jeden wymiar).

Jednym z ważnych celów asymetrycznej analizy korespondencji jest ocena mocy predykcji kategorii zmiennej zależnej przez kategorie zmiennej niezależnej. W procedurze wywiadu drabinkowego struktura atrybutów określa ich konsekwencje i wartości – stąd w analizie asymetrycznej ocenia się proporcjonalny wkład osi we względny przyrost predykcji wybieranych konsekwencji i wartości. Tabela 3 przedstawia proporcjonalny wkład wymiarów w predykcję zmiennych zależnych.

Z danych przedstawionych w tabeli 3 wynika, że pierwszy wymiar ma największy wkład w moc predycyjną drabinek: C3V1, C6V2, C6V7 (zdrowie i oszczędność), a drugi wymiar – C1V1, C1V2 (przyjemność).



Rys. 3. Zależności między drabinkami prominentnymi w dwuwymiarowym układzie osi głównych (skalowanie symetryczne).

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3 przedstawia wykres bąbelkowy zależności między cechami a konsekwencjami i wartościami w strukturze drabinek prominentnych. Wielkość wyróżnionej kategorii jest proporcjonalna do bezwładności układu wyjaśnianej przez dany punkt (kategorię) na wykresie.

Struktura łańcuchów środków-celów wskazuje, że pierwszy, dominujący wymiar (najwyższe udziały wkładu w bezwładność wymiaru oraz wartości kwadratów cosinusów) jest związany z relacjami między niską ceną papierosów, ich łagodnością oraz samosterownością palacza i jego zdrowiem (wymiar „łagodność i zdrowie”). Drugi wymiar najsilniej wyjaśnia relacje między smakiem, mocą, przyjemnością i hedonizmem (wymiar „smaczna przyjemność”). Strzałki na wykresie reprezentują prominentne drabinki o największym wkładzie w bezwładność układu.

## 6. Podsumowanie

Jako uzupełnienie podejścia E. Kąciaka, C.W. Cullena i A. Sagana [2010] do analizy i oceny jakości drabinek w artykule zaproponowano wykorzystanie znanego indeksu centralności (tzw. wskaźnika Smitha). Należy go obliczać jako ważoną częstość pojawiania się triad złożonych z cech, konsekwencji i wartości osobowych. W wypadku danych ladderingowych wskaźnik ten pozwala syntetycznie uwzględnić nie tylko ich ranking w strukturze łańcuchów środków-celów, lecz także częstość pojawiania się poszczególnych drabinek A-C-V. Z tego względu pozwala on oceniać jakość drabinek z perspektywy szerszej niż ta uwzględniona przez wymienionych autorów.

Drugim celem artykułu było zaproponowanie metody analizy rozkładów relacji między elementami łańcucha środków-celów opartej na analizie korespondencji tabeli uzyskanej z przekształcenia macierzy drabinek SLM. Tabela ta jest skondensowaną wersją macierzy SLM i przedstawia częstość występowania poszczególnych prominentnych drabinek A-C-V w opisywanym badaniu polskich palaczy. W wyniku obliczeń otrzymano dodatkową informację na temat dominujących wymiarów w strukturze łańcuchów środków-celów, a także wyznaczono drabinki prominentne o największym wkładzie w bezwładność układu.

Przedstawione wnioski muszą uwzględniać pewne ograniczenia analizy. Skrócona metoda „twardego” wywiadu ladderingowego może być zastosowana jedynie w sytuacji planu wywiadu typu  $3 \times (1 + 3 + 3 \times 3)$ . Ponieważ występują również inne formaty wywiadów, nie jest do końca jasne, jakie będą rezultaty analizy dla tych planów. Ponadto struktura łańcucha składa się z triad określających zależność między cechami, konsekwencjami a wartościami. W klasycznym podejściu środków-celów zwykle wyróżnia się cztery poziomy abstrakcji (cechy, konsekwencje funkcjonalne, konsekwencje psychospołeczne i wartości) [Olson



i Reynolds 2001]. Inne ograniczenie wynika z charakteru wywiadu drabinkowego. „Twarde” wywiady cechują się niskim stopniem kontroli sytuacji, w jakich się odbywają (czas, miejsce, obecność innych itp.). Czynniki te mają istotny wpływ na jakość wywiadu (zob. [Gutman 1997, Huber, Beckmann i Herrmann 2004, Pitts, Wong i Whalen 1991, Reynolds i Gutman 1988, 2001, Woodside 2004]. Szczególnie dotyczy to zjawiska będącego przedmiotem analizy. Palenie papierosów silnie zależy od kontekstowych czynników sytuacyjnych (pora dnia, czynność towarzysząca, obecność innych, presja czasu itp.) i wyniki analizy mogą być w dużym stopniu od nich uzależnione.

## Literatura

- Ajzen I., Fishbein M. [1980], *Understanding Attitudes and Predicting Social Behavior*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Axelrod J.N. [1968], *Attitude Measures That Predict Purchase*, „Journal of Advertising Research”, vol. 8(1).
- Bech-Larsen T., Nielsen N.A. [1999], *A Comparison of Five Elicitation Techniques for Elicitation of Attributes of Low Involvement Products*, „Journal of Economic Psychology”, vol. 20, nr 3.
- D’Ambra L., Lauro N.C. [1992], *Non Symmetrical Exploratory Data Analysis*, „Statistica Applicata”, vol. 4, nr 4.
- Grunert K.G., Grunert S.C. [1995], *Measuring Subjective Meaning Structures by the Laddering Method: Theoretical Considerations and Methodological Problems*, „International Journal of Research in Marketing”, vol. 12, nr 3.
- Gutman J. [1982], *A Means-End Chain Model Based on Consumer Categorization Process*, „Journal of Marketing”, vol. 46(2).
- Gutman J. [1997], *Means-End Chains as Goal Hierarchies*, „Psychology and Marketing”, vol. 14, nr 6.
- Huber F., Beckmann S.C., Herrmann A. [2004], *Means-End Analysis: Does the Affective State Influence Information Processing Style?*, „Psychology and Marketing”, vol. 21(9).
- Kąciak E., Cullen C.W. [2006], *Analysis of Means-End Chain Data in Marketing Research*, „Journal of Targeting, Measurement and Analysis for Marketing”, vol. 15(1).
- Kąciak E., Cullen C.W. [2009], *A Method of Abbreviating a Laddering Survey*, „Journal of Targeting, Measurement and Analysis for Marketing”, vol. 17(2).
- Kąciak E., Cullen C.W., Sagan A. [2010], *The Quality of Ladders Generated by Abbreviated Hard Laddering*, „Journal of Targeting, Measurement and Analysis for Marketing”, vol. 18, nr 3–4.
- Kroonenberg P., Lombardo R. [1999], *Nonsymmetric Correspondence Analysis: A Tool for Analysing Contingency Tables with a Dependence Structure*, „Multivariate Behavioral Research”, vol. 34, nr 3.
- Olson J.C., Reynolds T.J. [2001], *The Means-End Approach to Understanding Consumer Decision Making [w:] Understanding Consumer Decision Making: The Means-End Approach to Marketing and Advertising Strategy*, ed. T.J. Reynolds, J.C. Olson, Lawrence Earlbaum Associates, Mahwah.

- Phillips J.M., Reynolds T.J. [2009], *A Hard Look at Hard Laddering. A Comparison of Studies Examining the Hierarchical Structure of Means-End Theory*, „Qualitative Market Research: An International Journal”, vol. 12(1).
- Pitts R.E., Wong J.K., Whalen J.D. [1991], *Consumers' Evaluative Structures in Two Ethical Situations: A Means-End Approach*, „Journal of Business Research”, vol. 22, nr 2.
- Reynolds T.J. [2006], *Methodological and Strategy Development Implications of Decision Segmentation*, „Journal of Advertising Research”, December.
- Reynolds T.J., Gutman J. [1988], *Laddering Theory, Method, Analysis, and Interpretation*, „Journal of Advertising Research”, February/March.
- Reynolds T.J., Gutman J. [2001], *Laddering Theory, Method, Analysis, and Interpretation [w:] Understanding Consumer Decision Making: The Means-End Approach to Marketing and Advertising Strategy*, ed. T.J. Reynolds, J.C. Olson, Lawrence Earlbaum Associates, Mahwah.
- Reynolds T.J., Phillips J.M. [2008], *A Review and Comparative Analysis of Laddering Research Methods: Recommendations for Quality Metrics*, „Review of Marketing Research”, vol. 5(6).
- Sagan A. [2004], *Structural Model of Product Meaning Using Means-End Approach [w:] Innovations in Classification Data Science, and Information Systems*, ed. D. Baier, K.-D. Wernecke, Brandenburg University of Technology, Springer-Verlag, Cottbus.
- ter Hofstede F., Steenkamp J.-B.E.M., Wedel M. [1999], *International Market Segmentation Based on Consumer-Product Relations*, „Journal of Marketing Research”, vol. 36, February.
- Woodside A.G. [2004], *Advancing Means-End Chains by Incorporating Heider's Balance Theory and Fournier's Consumer-Brand Relationship Typology*, „Psychology and Marketing”, vol. 21(4).
- Woodside A.G., Trappey R.J. III [1992], *Finding Why Customers Shop Your Store and Buy Your Brand: Automatic Cognitive Processing Model of Primary Choice*, „Journal of Advertising Research”, November/December.

### **Analysis of Means-End Structures Emerging from Abbreviated Hard Laddering Interviews**

The paper presents a new method of evaluating the quality of ladders obtained with the abbreviated hard laddering procedure (Kąciak and Cullen 2006). It is based on an analysis of summary ladder matrix (SLM) and top of mind awareness indices (TMA), which allows one to consider not only the sequence in which consecutive ladders are produced by the respondent but also the salience of these ladders. The quality of ladders is further examined through non-symmetrical correspondence analysis of the SLM. This makes it possible to obtain additional information on the dominant dimensions in the means-end structure and also to determine which prominent ladders contribute most to the system's inertia.

**Keywords:** means-end approach, hard laddering interviews, nonsymmetrical correspondence analysis, optimisation of laddering structures.

*Renata Wróbel-Rotter*

Katedra Ekonometrii i Badań Operacyjnych  
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

# **Estymowane modele równowagi ogólnej: zastosowanie metody dekompozycji funkcji do oceny zależności między parametrami postaci strukturalnej i zredukowanej\***

## **Streszczenie**

W pracy omówiono zagadnienia wykorzystania dekompozycji funkcji w estymowanych modelach równowagi ogólnej do charakterystyki zależności między parametrami postaci strukturalnej i zredukowanej. Dekompozycja funkcji rzędu pierwszego jest traktowana jako model regresji zależnej od stanu i estymowana metodami nieparametrycznymi. Wykorzystują one dowolnie liczną próbkę Monte Carlo, wygenerowaną z rozkładu prawdopodobieństwa dla wektora parametrów strukturalnych, opisującą nieznaną, nieliniową zależność. Estymacja oparta jest na technikach filtrowania i wygładzania wywodzących się z filtru Kalmana, zmodyfikowanych w sposób umożliwiający uwzględnienie znacznie większej zmienności parametrów regresji w modelach zależnych od stanu. Całość metodologii została zilustrowana na przykładzie zaczerpniętym z literatury.

---

\* Praca powstała w ramach badań statutowych Katedry Ekonometrii i Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie. Autorka pragnie złożyć podziękowania Profesorowi Jackowi Osiewalskiemu oraz uczestnikom seminarium Katedry Ekonometrii i Badań Operacyjnych za komentarze i dyskusję podczas prezentacji opracowania.

**Słowa kluczowe:** dynamiczne stochastyczne modele równowagi ogólnej, analiza wrażliwości, wielowymiarowa reprezentacja funkcji, filtr Kalmana, regresja o parametrach zależnych od stanu.

## 1. Wprowadzenie

Praca została poświęcona zastosowaniom metod analizy wrażliwości w modelach równowagi ogólnej i stanowi kontynuację opracowania *Obszary stabilności rozwiązania empirycznych modeli równowagi ogólnej: zastosowanie metod analizy wrażliwości* [Wróbel-Rotter 2011b]. W szczególności tematem jest analiza związku między parametrami postaci strukturalnej i zredukowanej modelu. Strukturalne równania dynamicznego modelu równowagi ogólnej tworzą nieliniowe systemy racjonalnych oczekiwań, które po rozwiązaniu i liniowej aproksymacji podlegają estymacji. Związek między parametrami postaci zredukowanej i strukturalnej modelu ma charakter nieliniowy, a jego określenie jest trudne ze względu na stosowanie aproksymacji, ma jednak kluczowe znaczenie dla użyteczności modelu w analizach ekonomicznych. Celem opracowania jest prezentacja sposobów znajdowania i przybliżania zależności łączącej parametry strukturalne estymowanego modelu równowagi ogólnej z parametrami jego postaci zredukowanej. Zagadnienia prezentowane w pracy, stanowiące niewielką część metodologii związanej z estymacją i analizą modeli równowagi ogólnej, zostały zilustrowane na przykładzie zaczerpniętym z literatury.

## 2. Postać strukturalna i zredukowana

System równań strukturalnych estymowanego modelu równowagi ogólnej można zapisać w postaci jednej funkcji wektorowej, warunkowej względem ustalonego wektora parametrów strukturalnych  $\theta$ , postaci:

$$E_t[f^*(y_{t+1}^*, y_t^*, y_{t-1}^*, \varepsilon_t; \theta)] = 0, \quad (1)$$

gdzie  $E_t$  oznacza operator wartości oczekiwanej, warunkowej względem zbioru informacji w momencie  $t$ ,  $y_t^*$  oznacza wektor wszystkich zmiennych endogenicznych w modelu,  $\varepsilon_t$  oznacza wektor egzogenicznych zakłóceń losowych i szoków występujących w postaci strukturalnej. Jej rozwiązanie prowadzi do postaci zredukowanej, umożliwiającej zapisanie reprezentacji modelu w przestrzeni stanów, która jest określana przez równanie przejścia:

$$s_t = A s_{t-1} + B \varepsilon_t, \quad (2)$$

gdzie  $s_t$  oznacza wektor stanu, elementy macierzy  $A$  i  $B$  są nieliniowymi funkcjami parametrów strukturalnych  $\theta$  modelu, oraz przez równanie obserwacji:

$$Y_t = F + Cs_t + v_t, \quad (3)$$

gdzie  $Y_t$  jest wektorem zmiennych obserwowalnych, zaś  $v_t$  jest wektorem zakłóceń losowych w równaniu obserwacji. Macierze parametrów  $A$  i  $B$  postaci zredukowanej zawierają kluczowe wielkości odpowiedzialne za wartości otrzymywanych charakterystyk modelowej gospodarki. Sposób rozwiązywania i aproksymacji modeli racjonalnych oczekiwań nie umożliwia określenia ich bezpośredniego powiązania z parametrami strukturalnymi  $\theta$ , co powoduje, że należy tutaj zastosować dodatkowe metody, w szczególności techniki stosowane w analizie wrażliwości. W pracy zaprezentowano sposoby znajdowania i przybliżania zależności łączącej parametry strukturalne  $\theta$  z parametrami macierzy przejścia  $A$  i  $B$ .

Ogólna definicja analizy wrażliwości (ang. *sensitivity analysis*) określa, w jakim stopniu niepewność związana z wnioskowaniem o danym czynniku wyjściowym w modelu (np. parametrze postaci zredukowanej) może zostać przypisana do źródeł niepewności związanych z poszczególnymi czynnikami wejściowymi (np. parametrami postaci strukturalnej). Pojęciem zbliżonym do analizy wrażliwości jest analiza niepewności, która ogranicza się do czynników wyjściowych w modelu. Do najważniejszych prac z zakresu analizy wrażliwości w modelach wielowymiarowych należą: [Saltelli *et al.* 2008, Saltelli *et al.* 2004, Osidele i Beck 2004, Ratto 2006, 2008, Berliant i Dakhliya 1997 oraz Saltelli 2002]. Zaprezentowane w artykule zagadnienia są kontynuacją zastosowań metod analizy wrażliwości globalnej (ang. *global sensitivity analysis*, GSA) w modelach równowagi ogólnej [Wróbel-Rotter 2011b].

### 3. Reprezentacja funkcji

Metoda reprezentacji funkcji znajduje zastosowanie do przybliżonego określenia charakteru nieliniowej i nieznanej zależności między poszczególnymi parametrami postaci zredukowanej i strukturalnej estymowanego modelu równowagi ogólnej, które są konsekwencją sposobu rozwiązywania modeli racjonalnych oczekiwań [Ratto 2006, 2008]. Została ona zaproponowana w pracy [Sobol' 2003]. Opiera się na wykorzystaniu skończonej dekompozycji funkcji na elementy coraz wyższego rzędu, znanej w literaturze pod nazwą wielowymiarowej reprezentacji funkcji (ang. *high dimensional model representation*, HDMR) [Sobol' 1993]. W przypadku modeli równowagi ogólnej nieznana, nieliniowa funkcja parametrów strukturalnych,  $f(\tilde{\theta}) = f(\theta_1, \dots, \theta_k)$ , stanowiąca najczęściej element macierzy

współczynników postaci zredukowanej  $A$  i  $B$ , może zostać aproksymowana przez skończoną sumę postaci:

$$f(\tilde{\theta}) = f_0 + \sum_i^k f_i(\theta_i) + \sum_i^k \sum_{j>i}^k f_{ij}(\theta_i, \theta_j) + \dots + f_{12\dots k}(\theta_1, \dots, \theta_k). \quad (4)$$

Składniki dekompozycji zależą wyłącznie od parametrów strukturalnych modelu równowagi ogólnej odpowiadających indeksom danego elementu rozwińnięcia. W szczególności  $f(\theta_i) = f_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) są nazywane efektami głównymi (ang. *main effects*), elementy  $f(\theta_i, \theta_j) = f_{ij}$  oznaczają efekty interakcji drugiego rzędu (ang. *second order interaction effects*), a  $f_{12\dots k}$  jest efektem interakcji  $k$ -tego rzędu. Elementy dekompozycji są ortogonalne w przypadku niezależności parametrów strukturalnych modelu, a sama dekompozycja jest jednoznaczna [Sobol' 2003]. Poszczególne składniki są definiowane przez odpowiednie wartości oczekiwane:

$$f_0 = E(\tilde{\theta}), \quad (5)$$

$$f_i(\theta_i) = E(\tilde{\theta} | \theta_i) - f_0, \quad (6)$$

$$f_{ij}(\theta_i, \theta_j) = E(\tilde{\theta} | \theta_i, \theta_j) - f(\theta_i) - f(\theta_j) - f_0, \quad (7)$$

$$f_{ij_s}(\theta_i, \theta_j, \theta_s) = E(\tilde{\theta} | \theta_i, \theta_j, \theta_s) - f_{ij}(\theta_i, \theta_j) - f_{is}(\theta_i, \theta_s) - f_{js}(\theta_j, \theta_s) - f_i(\theta_i) - f_j(\theta_j) - f_s(\theta_s) - f_0,$$

.....

$$f_{12\dots k}(\theta_1\dots\theta_k) = E(\tilde{\theta} | \theta_1\dots\theta_k) + \dots - \sum_{k=1}^K \sum_{l>k}^K f_{kl}(\theta_k, \theta_l) - \sum_{k=1}^K f_k(\theta_k) - f_0. \quad (8)$$

Elementy dekompozycji informują, jak bardzo rozważana funkcja parametrów strukturalnych  $f(\tilde{\theta})$  odchyła się od średniego jej poziomu  $f_0$  w wyniku obecności danego parametru strukturalnego bądź ich grupy. Dekompozycja funkcji jest uzasadniana na gruncie teoretycznym jako zależność  $E(\tilde{\theta} | \theta_i)$  wynikająca z zagadnienia identyfikacji funkcji  $g(\theta_i)$  jednego parametru, która najlepiej aproksymuje wyjściową zależność  $f(\tilde{\theta}) = f(\theta_1, \dots, \theta_k)$  [Saltelli 2002]. Metoda aproksymacji takich zależności zakłada dowolnie ustalony punkt odniesienia (ang. *arbitrary reference point*) oraz ortogonalność parametrów strukturalnych. Oszacowana dekompozycja funkcji jest wykorzystywana do budowy indeksów wrażliwości umożliwiających określenie, która grupa parametrów ma największy wpływ na kształtowanie się danego parametru postaci zredukowanej. Bazują one na uogólnionej analizie wariancji, zaproponowanej w pracy [Sobol' 2003], szczegółowo omówionej w: [Sobol' et al. 2007]. Zagadnienie budowy indeksów wrażliwości z wykorzystaniem dekompozycji funkcji jest znane w literaturze pod nazwą ANOVA HDMR (ang. *analysis of variance HDMR*). Istota tej metody polega na konstrukcji skalarnej miary ważności wpływu danego parametru strukturalnego  $\theta_i$  na zmienność  $f(\tilde{\theta})$ . Miara taka jest zdefiniowana przez iloraz (warunkowych

względem  $\theta_i$  wariancji cząstkowych  $V_i = V(f_i(\theta_i))$  oraz wariancji bezwarunkowej (całkowitej)  $V = V(f(\tilde{\theta}))$ . Otrzymujemy w ten sposób indeksy wrażliwości postaci:  $S_i = V_i/V$  opisujące efekty główne, indeksy  $S_{ij} = V_{ij}/V$  obrazujące efekty drugiego rzędu, wynikające wyłącznie z zależności między parametrami (ang. *second order interaction effects*) itd. W przypadku dekompozycji funkcji rzędu pierwszego rozważamy wyłącznie indeksy oparte na efektach głównych. Symbol „ $i$ ” jest nazywany rzędem albo wymiarem indeksu wrażliwości.

#### 4. Dekompozycja funkcji jako model regresji

Odchylenia nieznannej funkcji parametrów strukturalnych  $f(\tilde{\theta}_t)$  od jej wartości oczekiwanej  $f_0$ , dla dekompozycji funkcji rzędu pierwszego, postaci:

$$f(\tilde{\theta}_t) - f_0 = f_1(\theta_{1t}) + \dots + f_k(\theta_{kt}) + R_t \quad (9)$$

można potraktować jako model regresji zależnej od stanu (ang. *state dependent regression*, SDR):

$$f(\tilde{\theta}_t) - f_0 = p_{1t}^*(\theta_{1t}) \theta_{1t} + \dots + p_{kt}^*(\theta_{kt}) \theta_{kt} + R_t, \quad (10)$$

gdzie indeks  $t$  oznacza kolejne obserwacje, w szczególności realizacje pochodzące z symulacji Monte Carlo,  $p_{1t}^*(\theta_{1t}), \dots, p_{kt}^*(\theta_{kt})$  są współczynnikami regresji zależnej od stanu  $\theta_t$ , z których każdy jest funkcją wyłącznie odpowiadającego mu parametru strukturalnego  $\theta_{it}$ ,  $R_t \sim N(0, \sigma^2)$  oznacza sumy składników wyższych rzędów, traktowane jako zmienne losowe o niezależnych rozkładach normalnych, o zerowej wartości oczekiwanej i nieznannej wariancji  $\sigma^2$ . Każdy ze składników dekompozycji pierwszego rzędu  $f_i(\theta_{it})$  jest funkcją wyłącznie jednego parametru strukturalnego  $\theta_{it}$ , co oznacza, że parametry regresji zależnej od stanu  $p_{it}^*(\theta_{it})$  są kształtowane wyłącznie przez pojedyncze zmienne wejściowe  $\theta_{it}$ . Implikuje to równość pomiędzy elementami dekompozycji pierwszego rzędu a współczynnikami regresji zależnej od stanu:

$$f_i(\theta_{it}) = p_{it}^*(\theta_{it}) \theta_{it} = p_{it} \theta_{it}. \quad (11)$$

Ostatecznie model podlegający estymacji przyjmuje postać:

$$f(\tilde{\theta}_t) - f_0 = p_{1t} \theta_{1t} + \dots + p_{kt} \theta_{kt} + R_t. \quad (12)$$

Estymacja współczynników  $p_{it}$  jest równoważna estymacji elementów  $f_i(\theta_{it})$  dekompozycji funkcji pierwszego rzędu, które następnie służą do budowy indeksów wrażliwości. Metody estymacji elementów drugiego i trzeciego rzędu prezentują m.in. [Ratto *et al.* 2004, Ratto 2008]. Dostępność dowolnie licznego

zbioru obserwacji ilustrującego zależność parametrów strukturalnych i postaci zredukowanej, pochodzącego z symulacji Monte Carlo powoduje, że do oszacowania dekompozycji funkcji można wykorzystać podejście nieparametryczne. Metody te wywodzą się z technik stosowanych do identyfikacji skomplikowanych związków nieliniowych, występujących w układach dynamicznych charakteryzujących się złożoną strukturą stochastyczną, przy założeniu dostępności znacznej liczby danych empirycznych [Young 2000]. Do ich estymacji najczęściej wykorzystuje się modele regresji zależnej od stanu systemu (ang. *state dependent parameters*, SDP), w szczególności model regresji o współczynnikach zmiennych w czasie (ang. *time variable parameters*, TVP).

Ogólna postać modelu regresji o parametrach zależnych od stanu, dopuszczająca również występowanie zmiennych egzogenicznych (ang. *state dependent auto-regression with exogenous variables*, SDARX), przedstawia się następująco [Young 2000]:

$$y_t = z_t' p_t + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2),$$

gdzie  $z_t' = [-y_{t-1} \ -y_{t-2} \ \dots \ -y_{t-n} \ u_{t-\delta} \ \dots \ u_{t-\delta-m}]$  zawiera opóźnienia zmiennej zależnej  $y_t$  oraz bieżące i opóźnione wartości pojedynczej zmiennej niezależnej  $u_t$ , wektor parametrów:

$$\begin{aligned} p_t &= [a_1(\chi_t) \ a_2(\chi_t) \ \dots \ a_n(\chi_t) \ b_0(\chi_t) \ \dots \ b_m(\chi_t)]' = \\ &= [p_1(\chi_t) \ p_2(\chi_t) \ \dots \ p_n(\chi_t) \ p_{n+1}(\chi_t) \ \dots \ p_{n+m+1}(\chi_t)]' \end{aligned} \quad (13)$$

zawiera współczynniki  $a_i(\chi_t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , oraz  $b_j(\chi_t)$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , zależne od stanu  $\chi_t = [z_t' \ U_t']$ , zaś  $U_t$  jest wektorem czynników innych niż  $u_t$  mogących mieć wpływ na zależność  $y_t$  i  $u_t$ ,  $n$  i  $m$  oznaczają rzędy opóźnień,  $\delta$  jest wartością opóźnienia pozwalającą na ujęcie różnicy między momentem wystąpienia zmiany w wartości  $u_t$  a pojawieniem się jej efektu w  $y_t$ . W kontekście zastosowania regresji zależnej od stanu do estymacji dekompozycji funkcji w analizie estymowanych modeli równowagi ogólnej przyjmujemy  $\delta = 0$ ,  $m = 0$ ,  $n = 0$ ,  $U_t = 0$ , co implikuje  $z_t = u_t$  i  $p_t = [b_0(\chi_t)] = [p(\chi_t)]$ . Oznacza to ograniczenie do zera liczby opóźnień zmiennej niezależnej, pozostawienie wyłącznie bieżących jej wartości oraz eliminację elementów autoregresyjnych. W przypadku zastosowania dekompozycji funkcji w modelach równowagi ogólnej zmienną niezależną stanowią parametry strukturalne  $\theta_{it}$ .

Model SDARX powstał jako uogólnienie modelu regresji liniowej stosowane do układów dynamicznych o charakterze stochastycznym, polegające na uzależnieniu wartości parametrów regresji od położenia, w jakim znajduje się system w danym momencie. Szczególnymi przypadkami są:



a) modele regresji o współczynnikach zmiennych w czasie TVP, uzyskane po eliminacji zależności parametrów od stanu systemu i pozostawieniu wyłącznie możliwości ich stopniowej ewolucji w czasie:  $p_t = [p_{1,t} p_{2,t} \dots p_{n+m+1,t}]'$ ,

b) modele regresji zależnej od stanu SDP, uzyskane po eliminacji zmiennych egzogenicznych i pozostawieniu części autoregresyjnej.

Estymacja parametrów modelu regresji zależnej od stanu opiera się na metodach stosowanych standardowo w ekonometrii nieparametrycznej do szacowania parametrów regresji o współczynnikach zmiennych w czasie [Wasserman 2006, Härdle 1994]. W modelach TVP zakłada się dla współczynników powolną, stopniową ich ewolucję w czasie, podczas gdy w modelach SDP dopuszcza się znaczną zmienność parametrów regresji, wynikającą z ich bezpośredniego powiązania z wektorem stanu  $\chi_t$ . Powoduje to, że techniki stosowane dla modeli o parametrach zmiennych w czasie stają się nieadekwatne i podlegają modyfikacji; szczegółową dyskusję tego zagadnienia zawiera praca [Young 2000]. W praktyce do nieparametrycznej identyfikacji zależności współczynników regresji od wektora stanu stosuje się procedurę wygładzania szeregu czasowego w ustalonych przedziałach, połączoną ze specjalnym sortowaniem danych oraz algorytmem iteracyjnej estymacji pojedynczych parametrów regresji (ang. *back-fitting procedures*). Efektem takiej estymacji jest ilustracja zależności pomiędzy poszczególnymi parametrami regresji i wektorem stanu w formie zbioru (wykresu) punktów, który następnie jest podstawą do estymacji modelu parametrycznego o stałych współczynnikach, najczęściej wielomianu.

Estymacja dekompozycji funkcji jako modelu regresji zależnej od stanu, w zastosowaniu do estymowanych modeli równowagi ogólnej, przebiega według następujących ogólnych etapów:

1) określenie procesu stochastycznego opisującego zmienność współczynników  $p_{it}$ , które są najczęściej reprezentowane przez procesy błędzenia losowego;

2) wygenerowanie próbki losowej z rozkładu prawdopodobieństwa dla  $\theta$  (rozkładu *a posteriori* albo *a priori*) i uzyskanie wektora wartości opisujących nieznaną zależność między współczynnikami postaci zredukowanej i parametrami strukturalnymi;

3) nieparametryczna estymacja współczynników  $p_{it}$  na podstawie uzyskanej próbki Monte Carlo, składająca się z dwóch zasadniczych etapów:

a) zastosowania rekursywnych metod estymacji, wykorzystywanych w przypadku modeli o parametrach zmiennych w czasie do identyfikacji zależności parametrów regresji zależnej od stanu od zdefiniowanych zmiennych stanu.

b) parametryzacji zidentyfikowanej nieparametrycznie zależności między zmiennymi stanu a współczynnikami postaci zredukowanej, modelem o stałych współczynnikach, estymowanym najczęściej metodą największej wiarygodności.

## 5. Technika estymacji modeli o parametrach zależnych od stanu

Stosowanie procedury nieparametrycznej estymacji modeli regresji o współczynnikach zależnych od stanu bądź zmiennych w czasie wymaga przyjęcia założeń dotyczących procesu kształtującego ewolucję  $p_{it}$ , najczęściej ujmującego ich zmienność w sposób stochastyczny. Zmienność każdego z parametrów regresji  $p_{it}$  opisuje się przez dwuwymiarowy stochastyczny wektor stanu  $x_{it} = [l_{it} \ d_{it}]'$ , składający się z dwóch procesów,  $l_{it}$  oraz  $d_{it}$ , odpowiadających za zmianę poziomu oraz nachylenia krzywej reprezentującej parametr. Opis dynamiki stochastycznych zmiennych stanu  $x_{it}$  najczęściej jest dokonywany poprzez uogólnione procesy błędzenia losowego (ang. *generalized random walk*, GRW), zdefiniowane w formie równania przestrzeni stanów:

$$x_{it} = F_i x_{i,t-1} + G_i \eta_{it}, F_i = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}, G_i = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, m + n + 1, \quad (14)$$

gdzie  $\eta_{i,t} = [\eta_{1,i,t} \ \eta_{2,i,t}]'$  jest wektorem składników losowych o zerowej wartości oczekiwanej oraz diagonalnej macierzy kowariancji  $Q_{\eta_i}$ , będących źródłem stochastycznych zmian parametrów w modelu regresji. Szczególnym przypadkiem GRW jest skalarny proces błędzenia losowego otrzymany po założeniu  $\beta = \gamma = \varepsilon = 0$  oraz  $\alpha = \delta = 1$ , który sprowadza się do zależności  $l_{it} = l_{i,t-1} + \eta_{1,i,t}$  oraz  $d_{it} = p_{it}$ , najczęściej przyjmowanej w praktyce do opisu zmienności parametrów  $p_{it}$  w zastosowaniach dotyczących modeli równowagi ogólnej. Parametry  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  oraz elementy macierzy kowariancji  $Q_{\eta_i}$ , zwane w tym kontekście hiperparametrami, nie są znane i podlegają estymacji, najczęściej metodą największej wiarygodności; szczegóły zawiera praca [Young 2000].

Model regresji jest następnie zapisywany w formie przestrzeni stanów składającej się z równania przejścia, powstałego poprzez agregację indywidualnych równań dla poszczególnych parametrów, oraz równania obserwacji, łączącego wektor stanu ze zmienną obserwowalną:

$$x_t = Fx_{t-1} + G\eta_t, \quad (15)$$

$$y_t = H_t x_t + \mu_t, \quad (16)$$

gdzie  $x_t = [x'_{1t} \ x'_{2t} \ \dots \ x'_{n+m+1,t}]'$ ,  $F$  oraz  $G$  są macierzami blokowo-diagonalnymi, zbudowanymi z macierzy  $F_i$  oraz  $G_i$ ,  $\eta_t$  jest wektorem zawierającym wektory zakłóceń  $\eta_{it}$ , niezależnym od zakłóceń równania obserwacji  $\mu_t$ , o macierzy kowariancji  $Q$  zbudowanej z indywidualnych macierzy kowariancji  $Q_{\eta_i}$ . Macierz  $H_t = [-y_{t-1} \ -y_{t-2} \ \dots \ -y_{t-n} \ u_{t-\delta} \ \dots \ u_{t-\delta-m}]$  w przypadku założenia skalarnego procesu błędzenia losowego dla  $p_{it}$ .

Zasadniczym elementem nieparametrycznej estymacji modeli regresji o parametrach zależnych od stanu jest filtrowanie i wygładzanie szeregu danych z zastosowaniem procedur wywodzących się z filtru Kalmana. Składa się ona z dwóch zasadniczych etapów: w pierwszym następuje filtrowanie uzyskanej próbki Monte Carlo za pomocą rekursywnie stosowanej metody najmniejszych kwadratów, natomiast w drugim dokonuje się estymacji pojedynczych parametrów regresji za pomocą wygładzania obserwacji w ustalonych przedziałach (ang. *fixed interval smoothing*, FIS), połączonego ze specjalnym sortowaniem danych. Filtrowanie próbki Monte Carlo zachodzi według następujących formuł [Young 2000]:

$$\hat{x}_{t|t-1} = F \hat{x}_{t-1} \text{ oraz } \hat{P}_{t|t-1} = F \hat{P}_{t-1} F' + G Q_r G', \quad (17)$$

gdzie wektory poprawek są dane przez:

$$\hat{x}_t = \hat{x}_{t|t-1} + P_{t|t-1} H_t' [1 + H_t P_{t|t-1} H_t']^{-1} (y_t - H_t \hat{x}_{t|t-1}) \quad (18)$$

$$P_t = P_{t|t-1} + P_{t|t-1} H_t' [1 + H_t P_{t|t-1} H_t']^{-1} H_t P_{t|t-1} \quad (19)$$

oraz  $Q_r = Q / \sigma^2$  jest macierzą określającą iloraz wariancji zakłóceń losowych  $\eta_t$  do wariancji resztowej  $\sigma^2$ , oraz  $\hat{P}_t = P_t^* / \sigma^2$ , gdzie  $P_t^*$  oznacza macierz kowariancji błędu predykcji wektora stanu. Wygładzanie metodą FIS oparte jest na następujących zależnościach:

$$\hat{x}_{t|N} = F^{-1} [\hat{x}_{t+1|N} + G Q_r G' L_t], \quad (20)$$

$$L_t = [I - P_{t+1} H_{t+1}' H_{t+1}]' [F' L_{t+1} - H_{t+1}' (y_{t+1} - H_{t+1} \hat{x}_{t+1})] \text{ oraz } L_N = 0, \quad (21)$$

$$P_{t|N} = P_t + P_t F' P_{t+1|N}^{-1} [P_{t+1|N} - P_{t+1|t}] P_{t+1|t}^{-1} F P_t, \quad (21)$$

gdzie  $I$  oznacza macierz jednostkową. W modelach regresji zależnej od stanu zmienność parametrów regresji  $p_i(\chi_t)$  jest znacznie większa niż zmienność  $p_{it}$  w modelach o współczynnikach zmiennych w czasie, co jest konsekwencją ich bezpośredniego powiązania ze zmiennymi stanu. Powoduje to nieadekwatność przyjmowanych w modelach TVP założeń, w szczególności dotyczących stosowania uogólnionych procesów błędzenia losowego do opisu dynamiki współczynników regresji. Proponowanym w praktyce rozwiązaniem *ad hoc* jest zmiana kolejności danych w taki sposób, aby uzyskana zmienność parametrów dla obserwacji posortowanych była mniej gwałtowna niż w szeregu wyjściowym [Young 2000].

Algorytm estymacji parametrów regresji zależnych od stanu sprowadza się do znalezienia wstępnych ocen parametrów regresji  $\hat{p}_{it|N}^0$  z zastosowaniem procedur estymacji modeli o współczynnikach zmiennych w czasie, a następnie ich kory-

gowania poprzez estymację FIS regresji pomocniczych dla pojedynczych współczynników regresji postaci:

$$y_t^i = p_{it} z_{it}, \quad (23)$$

gdzie  $y_t^i = y_t - \sum_{j \neq i} z_{jt} \hat{p}_{it}^k$ ,  $k$  oznacza kolejną iterację. Indywidualne parametry regresji są szacowane po każdorazowym posortowaniu  $y_t^i$  i  $z_{it}$  rosnąco względem  $z_{it}$  [Young 2000]. Estymacja FIS regresji pomocniczych jest powtarzana do momentu ustabilizowania się wartości współczynnika determinacji bądź spełnienia innego kryterium zbieżności. Parametry wygładzania niezbędne do estymacji FIS są optymalizowane metodą największej wiarygodności.

Nakreślona metoda estymacji parametrów regresji zależnej od stanu stanowi ogólną technikę nieparametrycznej estymacji nieliniowych, stochastycznych systemów zaproponowaną w kontekście mechanistycznego podejścia do modelowania danych empirycznych (ang. *data-based mechanistic modelling*), w którym najważniejszym elementem jest uzyskanie modelu opisującego kształtowanie się badanego zjawiska. Metody należące do tej klasy nie zostały dokładnie opracowane pod względem warunków niezbędnych do określenia kryterium zbieżności, w szczególności nie są znane warunki stabilności algorytmu FIS oraz własności statystyczne estymatorów parametrów regresji i macierzy kowariancji. Podejście to stanowi alternatywę dla innych metod estymacji, ze względu na próbę identyfikacji charakteru nieliniowości występującego w danych przed ostateczną estymacją modelu parametrycznego (np. aproksymacji wielomianami). Umożliwia to stosowanie mniej sparametryzowanych modeli niż w przypadku np. sieci neuronowych [Young 2000].

## 6. Przykład empiryczny

Zastosowanie metod dekompozycji funkcji do oceny zależności między parametrami postaci strukturalnej i zredukowanej w estymowanych modelach równowagi ogólnej został zilustrowany na przykładzie zaczerpniętym z pracy [Rabanal i Rubio-Ramírez 2005], który pierwotnie został zaproponowany w publikacji [Erceg, Henderson i Levin 2000]. W modelu zdefiniowano następujące zmienne: zagregowany produkt  $y_t$ , stopę procentową  $r_t$ , wskaźnik inflacji  $\hat{\pi}_t$  oraz wskaźnik zmiany płacy nominalnej  $\hat{\pi}_t^w$ , realną płacę  $w_t^r$ , zakłócenia stochastyczne obecne w preferencjach konsumentów  $g_t$  oraz technologii producentów pośrednich  $a_t$ , nakład pracy  $n_t$ , koszt krańcowy produkcji dodatkowej jednostki dobra pośredniego  $mc_t$  oraz krańcową stopę substytucji między konsumpcją a pracą  $mrs_t$ . Model w postaci strukturalnej ma następującą postać:

$$y_t = E_t y_{t+1} - \sigma(r_t - E_t \hat{\pi}_{t+1} + E_t g_{t+1} - g_t), \quad (24)$$

$$mrs_t = \sigma y_t + \gamma n_t - g_t, \quad (25)$$

$$\hat{\pi}_t^w = \beta E_t \hat{\pi}_{t+1}^w + \frac{(1 - \beta \theta_w)(1 - \theta_w)}{\theta_w(1 - \gamma \epsilon_w)} (mrs_t - w_t^r), \quad (26)$$

$$y_t = a_t + (1 - \alpha)n_t, \quad (27)$$

$$mc_t = w_t^r + n_t - y_t, \quad (28)$$

$$w_t^r = w_{t-1}^r + \hat{\pi}_t^w - \hat{\pi}_t, \quad (29)$$

$$\hat{\pi}_t = \beta E_t (\hat{\pi}_{t+1}) + \frac{(1 - \alpha)(1 - \theta_p \beta)(1 - \theta_p)}{\theta_p(1 + \alpha(\bar{\epsilon} - 1))} (mc_t + \epsilon_t^\lambda), \quad (30)$$

$$r_t = \rho_r r_{t-1} + (1 - \rho_r)(\gamma_\pi \hat{\pi}_t + \gamma_y y_t) + \epsilon_t^z, \quad (31)$$

$$a_t = \rho_a a_{t-1} + \epsilon_t^a, \quad (32)$$

$$g_t = \rho_g g_{t-1} + \epsilon_t^g, \quad (33)$$

gdzie  $\epsilon_t^* = [\epsilon_t^a \ \epsilon_t^g \ \epsilon_t^z \ \epsilon_t^\lambda]'$  oznacza wektor zakłóceń losowych (szoków) postaci strukturalnej,  $\theta = [\alpha \ \sigma \ \beta \ \gamma \ \epsilon \ \theta_p \ \rho_r \ \gamma_\pi \ \gamma_y \ \rho_a \ \rho_g \ \theta_w \ \epsilon_w]'$  zawiera parametry strukturalne. Szczegółowe wyprowadzenie równań można znaleźć m.in. w pracach: [Wróbel-Rotter 2011a, c, 2012b]. Model ten był również wykorzystywany do ilustracji zagadnień estymacyjnych i numerycznych w pracach: [Wróbel-Rotter 2011b, 2012a]. Przykład ten został również wykorzystany do ilustracji zagadnień związanych z modelami DSGE połączonymi z wektorową autoregresją: [Wróbel-Rotter 2013d, b, c, a, e]. Prace te stanowią kontynuację badań związanych ze stosowaniem estymowanych modeli równowagi ogólnej w praktyce, które poprzedzają artykuły wprowadzające w tematykę: [Wróbel-Rotter 2012c, d] i wcześniejsze, ogólniejsze prace: [Wróbel-Rotter 2007c, a, b, 2008].

Implementację numeryczną wykonano w pakiecie Dynare, wykorzystując dodatkowe procedury opracowane przez EU Joint Research Centre w Isprze [Adjemian *et al.* 2011]. W ocenie zależności między parametrami postaci strukturalnej i zredukowanej, w estymowanym modelu równowagi ogólnej próbka losowa jest generowana z rozkładu *a posteriori*, w praktyce wykorzystuje się realizacje otrzymane z algorytmu Metropolisa i Hastingsa. W przypadku zastosowania dekompozycji funkcji do analizy modelu przed jego estymacją bądź w modelach kalibrowanych próbkę losową generuje się z przyjętych rozkładów prawdopodobieństwa dla parametrów strukturalnych, w szczególności z rozkładu *a priori*. Dekompozycja funkcji jest wykorzystywana do zbudowania indeksów wrażliwości, które odgrywają kluczową rolę w określeniu parametrów strukturalnych mających największy

wpływ na parametry postaci zredukowanej bądź inną charakterystykę modelu, i służy zwykle jako narzędzie wstępnej analizy modelu.

W ramach zastosowania dekompozycji funkcji w estymowanych modelach równowagi ogólnej najczęściej analizuje się następujące zagadnienia:

1. Dla danej zmiennej endogenicznej rozważa się parametry strukturalne mające największy wpływ na współczynniki postaci zredukowanej znajdujące się przy jej opóźnieniach oraz opóźnieniach pozostałych zmiennych endogenicznych.

2. Dla danej zmiennej endogenicznej określa się parametry strukturalne mające największy wpływ na współczynniki w równaniu postaci zredukowanej znajdujące się przy zmiennych ujmujących egzogeniczne zakłócenia losowe (szoki).

3. Dla każdego z parametrów strukturalnych zestawia się wszystkie indeksy wrażliwości, co pozwala na wskazanie parametrów strukturalnych niemających znacznego wpływu na żaden z parametrów postaci zredukowanej. Oznacza to, że zmienność parametru strukturalnego nie koresponduje ze zmiennością parametru postaci zredukowanej i jej nie implikuje.

Ze względu na poprawność zastosowania algorytmu estymacji dekompozycji funkcji zwykle przed wykonaniem obliczeń dokonuje się oceny kształtu rozkładu interesującej nas funkcji parametrów strukturalnych  $f(\tilde{\theta})$ , w celu znalezienia najlepszej jej transformacji, tak aby otrzymany rozkład był jak najbardziej zbliżony do rozkładu gaussowskiego. W praktyce stosuje się najprostsze transformacje logarytmiczne, logarytmiczno-kwadratowe w przypadku symetrycznych grubych ogonów bądź skośne logarytmiczne dla rozkładów asymetrycznych. W przypadku rozważanej aplikacji zastosowano arbitralnie transformację logarytmiczno-kwadratową współczynników postaci zredukowanej, co implikuje budowę dekompozycji funkcji dla postaci:

$$f(\tilde{\theta}_t) - f_0 = \exp 0,5(f_1(\theta_{1t}) + \dots + f_k(\theta_{kt}) + R_t). \quad (34)$$

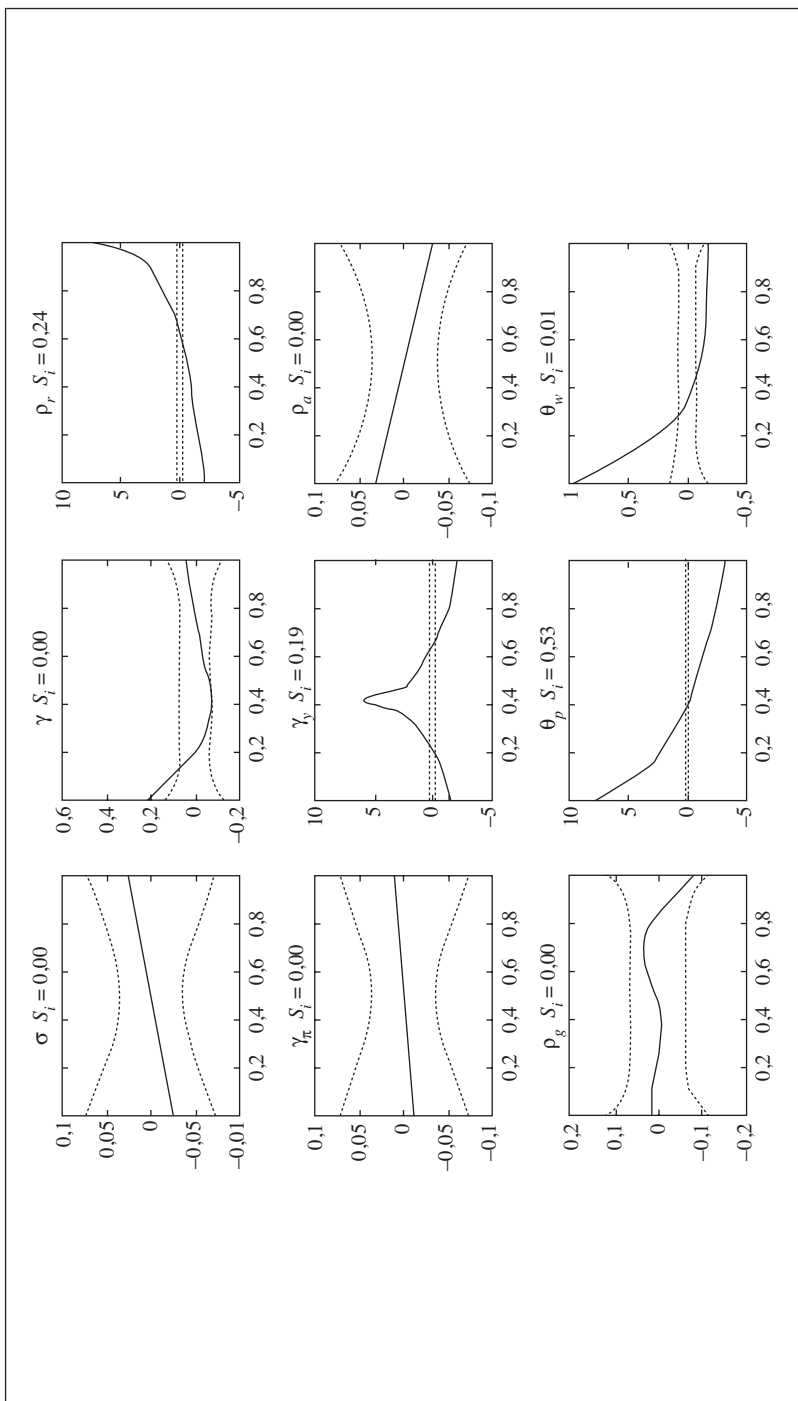
Najczęściej w zastosowaniach praktycznych modeli równowagi ogólnej obiektem zainteresowania są współczynniki postaci zredukowanej występujące w dwóch równaniach: inflacji i stopy procentowej znajdujące się przy opóźnionej stopie procentowej  $r_{t-1}$  i zakłóceniu monetarnym  $\varepsilon_t^z$ . Analiza wrażliwości sprawdza, który z parametrów strukturalnych  $\theta_i$  najbardziej wpływa na kształtowanie się siły reakcji bieżącego wskaźnika inflacji  $\pi_t$  na poziom stopy procentowej z okresu poprzedniego  $r_{t-1}$  oraz – analogicznie – jak zmienia się współczynnik postaci zredukowanej opisujący odpowiedź inflacji  $\pi_t$  na zakłócenie strukturalne  $\varepsilon_t^z$ . Podobnie rozważamy wpływ parametrów strukturalnych  $\theta_i$  na współczynniki postaci zredukowanej w równaniu stopy procentowej, opisujące zależność  $r_t$  od  $r_{t-1}$  oraz  $\varepsilon_t^z$ . Analizujemy zatem cztery współczynniki postaci zredukowanej, mając na celu określenie, który z parametrów strukturalnych  $\theta_i$  ma największy wpływ na kształtowanie się siły wpływu szoku monetarnego  $\varepsilon_t^z$  na

inflację  $\pi_t$  i stopę procentową  $r_t$  oraz wpływu opóźnionej stopy procentowej  $r_{t-1}$  na jej bieżący poziom  $r_t$  oraz bieżącą inflację  $\pi_t$ . Na rys. 1 przedstawiono indeksy wrażliwości  $S_i$  dla współczynnika przy zakłóceniu monetarnym  $\varepsilon_t^z$  znajdującego się w równaniu inflacji  $\pi_t$  oraz aproksymacje elementów pierwszego rzędu dekompozycji funkcji dla logarytmiczno-kwadratowej transformacji współczynnika wraz z 99,9-proc. przedziałami ufności (linie przerywane). Linie ciągłe, będące wykresami efektów głównych  $f_i(\theta_i)$ , przedstawiają udział każdego z parametrów strukturalnych  $\theta_i$  w zmienności poddanego transformacji współczynnika postaci zredukowanej wokół jego średniej. Na osi odciętych znajduje się parametr postaci strukturalnej.

Obliczone indeksy wrażliwości wskazują, że największy wpływ na kształtowanie się współczynnika postaci zredukowanej przy zakłóceniu monetarnym występującym w równaniu inflacji ma parametr strukturalny  $\theta_p$ , odpowiedzialny za 53% całkowitej jego zmienności. W dalszej kolejności znaczący wpływ mają również parametry  $\rho_r$  oraz  $\gamma_y$ , wyjaśniające odpowiednio 24% i 19% zmienności współczynnika postaci zredukowanej; pozostałe parametry strukturalne nie mają istotnego znaczenia. Analogiczna interpretacja dotyczy wyników uzyskanych dla współczynnika postaci zredukowanej znajdującego się przy opóźnionej stopie procentowej w równaniu inflacji (nieilustrowane). Indeksy wrażliwości wskazują, że największy wpływ na jego kształtowanie się ma parametr  $\rho_r$  z postaci strukturalnej, odpowiedzialny za 53% całkowitej jego zmienności. W dalszej kolejności znaczący wpływ mają również parametry  $\theta_p$  oraz  $\gamma_y$ , wyjaśniające odpowiednio 33% i 12% zmienności współczynnika postaci zredukowanej.

Analogiczne rozważania dla równania stopy procentowej w postaci zredukowanej modelu (nieprezentowane na rysunkach) prowadzą do wniosku, że współczynnik przy zakłóceniu monetarnym  $\varepsilon_t^z$  jest kształtowany przez parametry  $\theta_p$ ,  $\rho_r$ ,  $\sigma$  oraz  $\gamma_y$ , które wyjaśniają odpowiednio 29%, 22%, 18% oraz 16% jego zmienności. Znikomy wpływ ma parametr  $\theta_w$ , około 1%. Współczynnik przy opóźnionej stopie procentowej jest kształtowany głównie przez parametr  $\rho_r$ , dla którego indeks wrażliwości wynosi 53%, oraz przez parametry  $\theta_p$ ,  $\sigma$  oraz  $\gamma_y$ , dla których otrzymujemy odpowiednio 18%, 11% oraz 10%. Zaprezentowana krótka analiza pozwala stwierdzić, że w rozważanym modelu równowagi ogólnej istotne z perspektywy analiz ekonomicznych parametry postaci zredukowanej są kształtowane przez zaledwie kilka parametrów postaci strukturalnej. Omawiany model stanowił przedmiot analiz we wcześniejszej pracy [Wróbel-Rotter 2012a]. Wskazano w niej, że parametr  $\theta_p$  jest trudno identyfikowalny, obserwowana była wrażliwość oceny punktowej i rozkładu *a posteriori* na zmianę rozkładu *a priori*, ujawniały się też problemy ze zbieżnością oraz stabilnością numeryczną.

Analiza efektów głównych wskazuje, że dodatnie wartości  $f_i(\theta_i)$  implikują duże, co do wartości bezwzględnej, poziomy współczynnika postaci zreduko-



Rys. 1. Indeksy wrażliwości i składniki pierwszego rzędu dekompozycji funkcji dla współczynnika przy zakłóceniu monetarnym w równaniu inflacji postaci zredukowanej

Źródło: opracowanie własne.



wanej, i ma charakter pogładowy. Duże wartości parametru strukturalnego  $\rho_r$  oraz małe dla  $\theta_p$  implikują wysokie, co do wartości bezwzględnej, wartości współczynnika postaci zredukowanej w równaniu inflacji, znajdujące się przy zakłóceniu monetarnym  $\varepsilon_t^c$ . Niewielkie wartości  $\rho_r$  oraz znaczne dla  $\theta_p$  implikują bliskie zera wartości współczynnika postaci zredukowanej. Współczynnik ten jest podstawą do budowy funkcji odpowiedzi impulsowych, stąd jego istotne znaczenie dla wniosków ekonomicznych wynikających z modelu, w szczególności dotyczących siły i kierunku oddziaływania szoków. Analogiczna interpretacja dotyczy współczynnika przy opóźnionej stopie procentowej w równaniu inflacji, którego duże poziomy korespondują z dużymi wartościami parametru strukturalnego  $\rho_r$  oraz małymi dla  $\theta_p$ . W równaniu dla stopy procentowej znaczne wartości współczynników przy opóźnionej stopie procentowej oraz zakłóceniu monetarnym korespondują z dużymi wartościami parametru strukturalnego  $\rho_r$  oraz małymi dla  $\theta_p$ . Niskie wartości  $\rho_r$  oraz wysokie  $\theta_p$  implikują niskie co do wartości bezwzględnej, bliskie zera, wartości tych współczynników. Kluczowe parametry postaci zredukowanej stanowiące podstawę do konstrukcji charakterystyk ekonomicznych modelowej gospodarki są kształtowane przez zaledwie kilka parametrów postaci strukturalnej, w szczególności przez  $\theta_p$ ,  $\rho_r$  oraz  $\gamma_v$ . Zaprezentowana metodologia pozwala w praktyce na ogólne określenie dynamicznej relacji łączącej wybrane parametry postaci zredukowanej z parametrami postaci strukturalnej, a w szczególności określenie istniejącego w modelu związku inflacji ze stopą procentową i szokiem monetarnym oraz relacji łączącej bieżącą stopę procentową z jej opóźnieniami i szokiem monetarnym.

## 7. Podsumowanie

Praca przedstawia zastosowanie metod dekompozycji funkcji do analizy nieznanego i nieliniowego związku między parametrami postaci strukturalnej i zredukowanej estymowanego modelu równowagi ogólnej. Dekompozycja funkcji pierwszego rzędu jest traktowana jako model regresji zależnej od stanu, który estymuje się technikami nieparametrycznymi, opartymi na filtrowaniu i wygładzaniu uzyskanej z symulacji Monte Carlo próbki losowej. Oszacowane elementy dekompozycji funkcji służą budowie indeksów wrażliwości, informujących o wpływie każdego z parametrów strukturalnych na wybrany parametr postaci zredukowanej. Uzyskane rezultaty dostarczają ogólnego opisu zależności między parametrami strukturalnymi a kluczowymi parametrami postaci zredukowanej, determinującymi charakterystyki ekonomiczne uzyskiwane na podstawie modelu.

## Literatura

- Adjemian S. *et al.* [2011], *Dynare: Reference Manual, Version 4*, Dynare Working Papers 1.
- Berliant M., Dakhliya S. [1997], *Sensitivity Analysis for Applied General Equilibrium Models in the Presence of Multiple Equilibria*, GE, Growth, Math Methods 9709003, EconWPA.
- Erceg C.J., Henderson D.W., Levin A.T. [2000], *Optimal Monetary Policy with Staggered Wage and Price Contracts*, „Journal of Monetary Economics”, vol. 46, nr 2.
- Härdle W. [1994], *Applied Nonparametric Regression*, Springer, Berlin.
- Osidele O.O., Beck M.B. [2004], *Food Web Modelling for Investigating Ecosystem Behaviour in Large Reservoirs of the South-eastern United States: Lessons from Lake Lanier, Georgia*, „Ecological Modelling”, vol. 173, nr 2–3.
- Rabanal P., Rubio-Ramírez J.F. [2005], *Comparing New Keynesian Models of the Business Cycle: A Bayesian Approach*, „Journal of Monetary Economics”, vol. 52, nr 6.
- Ratto M. [2006], *Global Sensitivity Analysis for DSGE Models*, manuscript.
- Ratto M. [2008], *Analysing DSGE Models with Global Sensitivity Analysis*, „Computational Economics”, vol. 31, nr 2.
- Ratto M. *et al.* [2004], *Accelerated Estimation of Sensitivity Indices Using State Dependent Parameter Models*, Proceedings of the 4th International Conference on Sensitivity Analysis of Model Output (SAMO 2004), Santa Fe, New Mexico, March 8–11.
- Saltelli A. [2002], *Sensitivity Analysis for Importance Assessment*, „Risk Analysis”, vol. 22, nr 3.
- Saltelli A. *et al.* [2004], *Sensitivity Analysis in Practice: A Guide to Assessing Scientific Models*, Wiley.
- Saltelli A. *et al.* [2008], *Global Sensitivity Analysis. The Primer*, Wiley.
- Sobol' I.M. [1993], *Sensitivity Analysis for Non-linear Mathematical Models*, Mathematical Modeling and Computational Experiment 1, English translation of Russian original paper by I.M. Sobol' (1990).
- Sobol' I.M. [2003], *Theorems and Examples on High Dimensional Model Representation*, „Reliability Engineering and System Safety”, vol. 79, nr 2.
- Sobol' I.M. *et al.* [2007], *Estimating the Approximation Error when Fixing Unessential Factors in Global Sensitivity Analysis*, „Reliability Engineering and System Safety”, vol. 92, nr 7.
- Wasserman L. [2006], *All of Nonparametric Statistics*, Springer.
- Wróbel-Rotter R. [2007a], *Dynamic Stochastic General Equilibrium Models: Structure and Estimation*, Modelling Economies in Transition 2006, ed. W. Welfe, P. Wdowiński, Łódź.
- Wróbel-Rotter R. [2007b], *Dynamiczne Stochastyczne Modele Równowagi Ogólnej: zarys metodologii badań empirycznych*, Folia Oeconomica Cracoviensia, vol. 48.
- Wróbel-Rotter R. [2007c], *Dynamiczny Stochastyczny Model Równowagi Ogólnej: przykład dla gospodarki polskiej*, „Przegląd Statystyczny”, nr 3, t. 54.
- Wróbel-Rotter R. [2008], *Bayesian Estimation of a Dynamic General Equilibrium Model [w:] Metody Ilościowe w Naukach Ekonomicznych*, Ósme Warsztaty Doktorskie z zakresu Ekonometrii i Statystyki, red. A. Welfe, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Warszawa.

- Wróbel-Rotter R. [2011a], *Empiryczne modele równowagi ogólnej: gospodarstwa domowe i producent finalny*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie – Ekonomia, nr 869, Kraków.
- Wróbel-Rotter R. [2011b], *Obszary stabilności rozwiązania empirycznych modeli równowagi ogólnej: zastosowanie metod analizy wrażliwości*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie – Metody Analizy Danych, nr 873, Kraków.
- Wróbel-Rotter R. [2011c], *Sektor producentów pośrednich w empirycznym modelu równowagi ogólnej*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie – Ekonomia, nr 872, Kraków.
- Wróbel-Rotter R. [2012a], *Empiryczne modele równowagi ogólnej: zagadnienia numeryczne estymacji bayesowskiej*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie – Metody Analizy Danych, nr 878, Kraków.
- Wróbel-Rotter R. [2012b], *Struktura empirycznego modelu równowagi ogólnej dla niejednorodnych gospodarstw domowych*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie – Ekonomia, nr 879, Kraków.
- Wróbel-Rotter R. [2012c], *Wybrane zagadnienia współczesnego modelowania strukturalnego, część I: Estymowane modele równowagi ogólnej w zarysie*, Folia Oeconomica Cracoviensia 53.
- Wróbel-Rotter R. [2012d], *Wybrane zagadnienia współczesnego modelowania strukturalnego, część II: Wnioskowanie w estymowanych modelach równowagi ogólnej*, Folia Oeconomica Cracoviensia 53.
- Wróbel-Rotter R. [2013a], *Analiza stopnia zgodności z danymi empirycznymi estymowanego modelu równowagi ogólnej*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie – Ekonomia (złożone do druku).
- Wróbel-Rotter R. [2013b], *Estymowane modele równowagi ogólnej i autoregresja wektorowa. Aspekty teoretyczne*, „Przegląd Statystyczny” t. 60, nr 3.
- Wróbel-Rotter R. [2013c], *Estymowane modele równowagi ogólnej i wektorowa autoregresja. Aspekty praktyczne*, „Przegląd Statystyczny” t. 60, nr 4.
- Wróbel-Rotter R. [2013d], *Estymowane modele równowagi ogólnej i wektorowa autoregresja: model hybrydowy*, „Bank i Kredyt” vol. 44, nr 5.
- Wróbel-Rotter R. [2013e], *Hybrydowy model wektorowej autoregresji – analiza empiryczna funkcji odpowiedzi na zakłócenia strukturalne*, manuskrypt niepublikowany.
- Young P.C. [2000], *Stochastic, Dynamic Modelling and Signal Processing: Time Variable and State Dependent Parameter Estimation* [w:] *Nonlinear and Nonstationary Signal Processing*, ed. W.J. Fitzgerald, Cambridge University Press, Cambridge.

## **Empirical General Equilibrium Models: Application of High Dimensional Model Representation to Characterise the Relationship between Structural and Reduced Form Coefficients**

The paper presents the application of high dimensional model representation to characterise the relationship between structural and reduced form coefficients of estimated general equilibrium models. The function representation is considered a state-dependent regression that is estimated non-parametrically, based on Monte Carlo sample, and generated from the probability distribution of structural parameters. The estimation method consists of recursive filtering and smoothing algorithms, derived from the

Kalman filter, enhanced with special data re-ordering, to capture strong variability of the parameters in the state-dependent regression. The estimated function decomposition is used to build sensitivity indices. The methodology presented is illustrated with an example from the literature.

**Keywords:** dynamic stochastic general equilibrium, sensitivity analysis, high dimensional model representation, Kalman filter, state-dependent auto-regression with exogenous variables.

*Marcin Salamaga*

Katedra Statystyki

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

# Badanie konkurencyjności polskiego eksportu z wykorzystaniem skorygowanego wskaźnika przewagi komparatywnej

## Streszczenie

Wskaźnik Balassy (wskaźnik *RCA*) jest wykorzystywany powszechnie do oceny konkurencyjności eksportu towarów oraz przewagi komparatywnej kraju według sektorów produkcji lub grup towarowych. Ma on jednak pewne wady spowodowane m.in. brakiem unormowania wartości tego wskaźnika.

Empiryczne rozkłady wartości wskaźnika Balassy cechują się na ogół silną asymetrią i brakiem stabilności, co w istotny sposób ogranicza porównywalność jego wartości w ujęciu czasowym i przestrzennym. Za kolejną wadę należy uznać fakt, że wartości wskaźnika są wrażliwe na liczbę zarówno grup towarowych, jak i krajów w grupie referencyjnej. W artykule zaproponowano metodę normującą wartości wskaźnika *RCA* do przedziału liczbowego od  $-1$  do  $1$ , co poprawiło niektóre jego własności. Skorygowany wskaźnik przewagi komparatywnej został wykorzystany do badania ujawnionej przewagi komparatywnej Polski nad Niemcami. W artykule porównano stabilność empirycznych rozkładów skorygowanego wskaźnika *RCA* i oryginalnego wskaźnika Balassy w ujęciu czasowym i według grup towarowych. W obliczeniach wykorzystano dane z lat 2005–2009 pochodzące z Eurostatu.

**Słowa kluczowe:** wskaźnik względnej przewagi komparatywnej, wskaźnik Balassy, eksport, handel międzynarodowy.

## 1. Wprowadzenie

Polski eksport od kilkunastu lat charakteryzuje się rosnącą dynamiką i stanowi istotny element podtrzymania wzrostu gospodarczego w Polsce. Według danych GUS udział eksportu w PKB w 2012 r. sięgnął ok. 46% – dla porównania w 1995 r. i w 2009 r. było to odpowiednio ok. 22% i 39%. Wskaźniki te świadczą o zwiększającej się konkurencyjności całej gospodarki narodowej, jak również towarów wytwarzanych przez różne sektory i gałęzie przemysłu, jak np. przemysł rolno-spożywczy, chemiczny czy elektromaszynowy. Udział eksportu w PKB pokazuje znaczenie wymiany handlowej w tworzeniu potencjału gospodarczego kraju, ale w literaturze przedmiotu można znaleźć znacznie więcej mierników konkurencyjności eksportu. Problematykę konkurencyjności polskiego eksportu podejmowano w wielu pracach empirycznych i teoretycznych – zob. [Misala 2011, Czarny i Śledziwska 2009, Szymanik 2004, Urban 2003].

Podstawowym miernikiem wykorzystywanym w badaniach konkurencyjności eksportu towarów różnych krajów jest wskaźnik względnej przewagi komparatywnej (*revealed comparative advantage index* – indeks *RCA*) zaproponowany przez B. Balassę [1965]. Wyraża on stosunek wartości eksportu badanej grupy towarowej określonego kraju w całkowitej wartości eksportu tego kraju do udziału wartości światowego eksportu wyróżnionej grupy towarów w całkowitej wartości światowego eksportu. Z czasem w licznych badaniach empirycznych zaczęły pojawiać się różne reinterpretacje oryginalnej formuły Balassy, polegające np. na zastąpieniu całkowitej wartości eksportu przez wartość importu odpowiednich towarów [Misala 2011].

Należy zwrócić uwagę, że wskaźnik względnej przewagi komparatywnej ma kilka wad wynikających m.in. z braku unormowania jego wartości. Empiryczne rozkłady wartości wskaźnika *RCA* najczęściej nie są stabilne, co znacznie ogranicza porównywalność jego wartości w ujęciu czasowym i przestrzennym. Ponadto wartości wskaźnika są wrażliwe na liczbę sektorów (grup towarowych), a także na liczbę krajów w grupie referencyjnej. Implikuje to brak stabilności ważnych charakterystyk liczbowych rozkładu miernika. W literaturze przedmiotu można znaleźć próby konstrukcji unormowanych wskaźników względnej przewagi komparatywnej, np. addytywny wskaźnik *RCA* [Hoen i Oosterhaven 2006], znormalizowany indeks względnej przewagi komparatywnej [Yu, Cai i Leung 2000], wskaźnik względnej symetrycznej przewagi komparatywnej [Dalum, Laursen i Villumsen 1998, Iapadre 2001], jednak jak dotąd nie zyskały one szerszego uznania wśród badaczy międzynarodowej wymiany handlowej.

W artykule zaproponowano metodę transformacji wskaźnika *RCA* o wartościach z przedziału  $[0; \infty)$  do przedziału liczbowego  $[-1; 1)$ , co do pewnego stopnia eliminuje wady oryginalnego wskaźnika. Empiryczne rozkłady zmodyfikowanego

wskaźnika *RCA* badano na podstawie danych na temat zagranicznej wymiany handlowej Polski oraz Niemiec – kraju referencyjnego. O wyborze Niemiec jako kraju odniesienia w badaniu konkurencyjności polskiego eksportu zdecydowały następujące fakty:

- Niemcy mają największy potencjał gospodarczy spośród krajów graniczących z Polską,
- od kilkunastu lat wymiana handlowa Polski z Niemcami stanowi największy udział w obrotach polskiego handlu zagranicznego<sup>1</sup>.

W obliczeniach wykorzystano dane z lat 2005–2009 pochodzące z Eurostatu<sup>2</sup>.

## 2. Konstrukcja skorygowanego wskaźnika ujawnionej przewagi komparatywnej

Wskaźnik względnej przewagi komparatywnej zaproponowany przez B. Balassę [1965] dany jest następującym wzorem:

$$RCA_i = \frac{X_{ij}}{X_j} : \frac{X_i}{X}, \quad (1)$$

gdzie:

- $X_{ij}$  – wartość eksportu *i*-tej grupy towarowej w *j*-tym kraju,
- $X_j$  – całkowita wartość eksportu *j*-tego kraju,
- $X_i$  – wartość światowego eksportu *i*-tej grupy towarowej,
- $X$  – całkowita wartość eksportu światowego.

Wartości wskaźnika (1) mniejsze od jednościi wskazują na brak przewagi komparatywnej. Przyjmuje się, że wartości wskaźnika Balassy zawarte w przedziale od 1 do 2 wskazują na słabą przewagę komparatywną, wartości z przedziału od 2 do 4 wskazują na umiarkowaną przewagę komparatywną, zaś większe od 4 świadczą o silnej przewadze komparatywnej [Hinloopen i van Marrewijk 2001]. Wskaźnik (1) jest również stosowany w sytuacji oceny konkurencyjności eksportu kraju w zestawieniu z krajami referencyjnymi (np. krajami regionu gospodarczego, ugrupowaniem gospodarczym czy krajem partnerskim). Odpowiedni wzór ma wówczas postać:

$$RCA_i = \frac{X_{ij}}{X_j} : \frac{X_i^R}{X^R}, \quad (2)$$

<sup>1</sup> [http://www.paiz.gov.pl/polska\\_w\\_liczbach/gospodarka](http://www.paiz.gov.pl/polska_w_liczbach/gospodarka), data dostępu: 15.01.2011.

<sup>2</sup> <http://ec.europa.eu/eurostat>, data dostępu: 9.01.2011.

gdzie:

- $X_{ij}$  – wartość eksportu  $i$ -tej grupy towarowej w  $j$ -tym kraju,
- $X_j$  – całkowita wartość eksportu  $j$ -tego kraju,
- $X_i^R$  – wartość eksportu  $i$ -tej grupy towarowej w krajach referencyjnych,
- $X^R$  – całkowita wartość eksportu w krajach referencyjnych.

Fakt, iż wskaźnik względnej przewagi komparatywnej nie jest unormowany, powoduje, że jego rozkłady empiryczne zazwyczaj cechują się brakiem stabilności w ujęciu zarówno czasowym, jak i przestrzennym. Sprawia to pewne trudności w porównywaniu rozkładów wskaźnika  $RCA$  obliczanego np. dla różnych grup towarowych bądź w różnych okresach.

W artykule proponuje się przekształcenie wskaźnika  $RCA$  zgodnie z następującym wzorem:

$$RCA_k^{(a)} = \frac{RCA^a - 1}{RCA^a + 1}, \quad (3)$$

gdzie:

- $RCA_k^{(a)}$  – skorygowany wskaźnik ujawnionej przewagi komparatywnej,
- $RCA$  – wskaźnik względnej przewagi komparatywnej (wskaźnik Balassy),
- $a$  – dowolna liczba dodatnia (wykładnik potęgi).

Konstrukcja wskaźnika (3) jest inspirowana miarą zaproponowaną przez B. Daluma, K. Laursena i G. Villumsena [1998] i stanowi jej uogólnienie. Formuła (3) pozwala uzyskać unormowaną wartość wskaźnika  $RCA_k^{(a)}$  w przedziale od  $-1$  do  $1$ . Dodatnie wartości wskaźnika (3) wskazują na występowanie ujawnionej przewagi komparatywnej w eksporcie, zaś ujemne wartości tego miernika wskazują na brak takiej przewagi. Im bliższa  $1$  jest wartość wskaźnika (3), tym silniejsza jest przewaga komparatywna kraju. Z kolei im bliższa  $-1$  jest wartość  $RCA_k^{(a)}$ , tym większym brakiem przewagi komparatywnej cechuje się badany kraj. Należy przy tym zauważyć, że od przyjętej wartości parametru  $a$  zależy tempo zbieżności wskaźnika  $RCA_k^{(a)}$  do wartości granicznych przedziału  $[-1; 1]$ .

### 3. Metoda pomiaru stabilności rozkładu wartości wskaźnika względnej przewagi komparatywnej

Do oceny stabilności w czasie rozkładów wartości wskaźników  $RCA$  i  $RCA_k^{(a)}$  proponuje się wykorzystanie miernika stabilności struktury danego wzorem:



$$I_{t,s} = \sum_{i=1}^k (w_i^t - w_i^s) \cdot (\ln w_i^t - \ln w_i^s), \quad (4)$$

gdzie:

$w_i^t$  – częstość względna w  $i$ -tym przedziale klasowym w szeregu rozdzielczym w czasie  $t$ ,

$w_i^s$  – częstość względna w  $i$ -tym przedziale klasowym w szeregu rozdzielczym w czasie  $s$ .

$k$  – liczba klas w szeregu rozdzielczym przedziałowym.

Konstrukcja miernika (4) została zainspirowana indeksem stabilności populacji (*population stability index* – indeks *PSI*) [Olson i Wu 2008]. Podobnie jak w przypadku indeksu *PSI* przyjęto, że jeżeli wartości wskaźnika (4) są mniejsze od 0,1, to struktura rozkładu wartości cechy w okresie  $t$  nie wykazuje znaczących różnic w stosunku do struktury z okresu  $s$  – rozkład uznaje się za stabilny. Jeżeli wartości wskaźnika (4) należą do przedziału od 0,1 do 0,25, to porównywane rozkłady w czasie  $t$  i  $s$  wykazują pewne różnice – rozkład ma tendencję do niestabilności. W przypadku gdy wskaźnik (4) przekracza wartość 0,25, rozkład uznaje się za niestabilny.

Wprawdzie wartości wskaźnika (4) pozwalają na porównanie struktury rozkładu cechy tylko w dwóch okresach, lecz obliczając ten wskaźnik dla kolejnych sekwencji następujących po sobie okresów, możemy uzyskać szerszą wiedzę o procesie stabilizowania rozkładu w dłuższym przedziale czasowym.

Obliczenie ciągu wartości indeksu (4) postaci  $I_{t,t-1}$  dla  $t = 2, 3, \dots, n$  pozwala na ocenę tendencji w zakresie stabilizowania się rozkładu wartości wskaźnika przewagi komparatywnej. Jeżeli wartości miernika (4) tworzą ciąg  $I_{t,t-1}$  o wyrazach malejących, to można przypuszczać, że rozkład wartości badanego wskaźnika staje się stabilny. W przeciwnym wypadku, gdy wartości tego ciągu wykazują tendencję rosnącą, należy się spodziewać postępującej niestabilności w rozkładzie wartości wskaźnika przewagi komparatywnej. Wskaźnik (4) można wykorzystać również do badania stabilności rozkładu wskaźnika ujawnionej przewagi komparatywnej względem grup eksportowanych towarów. W tym przypadku subskrypty  $t$  i  $s$  we wzorze (4) będą oznaczać struktury rozkładu wartości badanego miernika odpowiednio w  $t$ -tej i  $s$ -tej grupie towarowej. W tej wersji wskaźnik (4) należy interpretować w analogiczny sposób jak indeks *PSI*: wartości mniejsze od 0,1 oznaczają wysoką stabilność rozkładu rozważanego miernika (np. wskaźnika *RCA* czy *RCA<sub>k</sub><sup>(w)</sup>*) w porównywanych grupach towarowych, wartości z przedziału od 0,1 do 0,25 wskazują na umiarkowaną stabilność takiego rozkładu, a wartości większe od 0,25 świadczą o rozkładzie niestabilnym.

#### 4. Wyniki badania przewagi komparatywnej Polski nad Niemcami według grup towarowych

Jednym z celów prowadzonej analizy jest porównanie empirycznych rozkładów wartości wskaźników  $RCA$  i  $RCA_k^{(a)}$  w wybranych grupach towarowych zgodnych z nomenklaturą Standardowej Międzynarodowej Klasyfikacji Handlu (Standard International Trade Classification – SITC) oraz ocena wrażliwości wartości charakterystyk liczbowych tych rozkładów pod względem grup towarowych. W badaniach wzięto pod uwagę grupy towarowe o dostatecznie dużej liczbie obserwacji, czyli wskaźników względnej przewagi komparatywnej obliczonych dla podgrup towarowych wyróżnionych na pięciocyfrowym poziomie dezagregacji. Ostatecznie w badaniach uwzględniono 5 następujących grup towarowych zawierających co najmniej 300 obserwacji (wartości wskaźników  $RCA$ ):

- SITC 0 – żywność i zwierzęta żywe,
- SITC 5 – chemikalia,
- SITC 6 – artykuły przemysłowe klasyfikowane według materiałów,
- SITC 7 – maszyny, urządzenia i środki transportu,
- SITC 8 – inne wyroby przemysłowe.

Przed wykonaniem analizy ze zbioru obliczonych wskaźników przewagi komparatywnej usunięto obserwacje odstające, które mogły zniekształcać opis rozkładu wskaźnika. W ramach każdej grupy towarowej SITC wyeliminowano 10% wartości ekstremalnych. Wyniki obliczeń wybranych charakterystyk liczbowych w rozkładach wartości wskaźników  $RCA$  i  $RCA_k^{(a)}$  przedstawiono w tabelach 1 i 2.

Przeciętne wartości wskaźnika  $RCA$  przedstawione w tabeli 1 w większości grup towarowych są większe od jedności (z wyjątkiem sekcji: chemikalia oraz maszyny, urządzenia i środki transportu). Wskazuje to więc na większą konkurencyjność polskiego eksportu niż niemieckiego w trzech grupach towarowych SITC. Szczegółowa analiza wykazała jednak, że w większości podgrup (dostępnych na niższym poziomie agregacji) Polska nie ma przewagi komparatywnej nad Niemcami. Zawyżone wartości przeciętnej konkurencyjności eksportu są wynikiem występowania wartości odstających w rozkładzie wskaźnika  $RCA$  (mimo wcześniejszej redukcji wartości ekstremalnych). Stąd lepszym sposobem oceny konkurencyjności eksportu towarów wydaje się zastosowanie mediany. Przyjmuje ona wartości mniejsze od 1 we wszystkich grupach towarowych z wyjątkiem grupy SITC 0. W świetle tych wyników tylko w grupie: żywność i zwierzęta żywe Polska może mieć przewagę komparatywną nad Niemcami jako krajem referencyjnym.

Tabela 1. Wybrane charakterystyki rozkładu wartości wskaźnika  $RCA$  obliczonego według grup towarowych SITC dla Polski względem Niemiec jako kraju odniesienia w 2009 r.

Charakterystyka liczbową	Grupa towarowa				
	SITC 0	SITC 5	SITC 6	SITC 7	SITC 8
Średnia	2,220	0,477	1,251	0,628	1,009
Mediana	1,319	0,212	0,630	0,323	0,655
Minimum	0,072	0,006	0,028	0,020	0,031
Maksimum	12,366	3,111	8,334	4,250	4,346
Kwartył dolny	0,537	0,044	0,244	0,112	0,230
Kwartył górny	2,975	0,608	1,591	0,764	1,567
Odchylenie standardowe	2,445	0,662	1,547	0,802	0,986
Współczynnik asymetrii	1,865	2,046	2,110	2,131	1,313

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych Eurostatu.

Tabela 2. Wybrane charakterystyki rozkładu wartości wskaźnika  $RCA_k^{(0,5)}$  obliczonego według grup towarowych SITC dla Polski względem Niemiec jako kraju odniesienia w 2009 r.

Charakterystyka liczbową	Grupa towarowa				
	SITC 0	SITC 5	SITC 6	SITC 7	SITC 8
Średnia	0,045	-0,367	-0,111	-0,268	-0,130
Mediana	0,069	-0,370	-0,115	-0,276	-0,105
Minimum	-0,577	-0,861	-0,714	-0,754	-0,701
Maksimum	0,557	0,276	0,485	0,347	0,352
Kwartył dolny	-0,154	-0,652	-0,339	-0,499	-0,351
Kwartył górny	0,266	-0,124	0,116	-0,067	0,112
Odchylenie standardowe	0,284	0,311	0,296	0,279	0,278
Współczynnik asymetrii	-0,316	0,269	-0,035	0,233	-0,238

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych Eurostatu.

Taka pozycja polskiego eksportu znajduje również odzwierciedlenie w wartościach skorygowanego wskaźnika względnej przewagi komparatywnej (zob. tabela 2). W obliczeniach parametr  $a$  przyjęto na poziomie 0,5. Otrzymane wartości wskaźnika (3) są ujemne w każdej z rozważanych grup towarowych z wyjątkiem grupy SITC 0. Ponadto można zauważyć, że wartości wskaźnika  $RCA_k^{(0,5)}$  obliczone dla poszczególnych grup towarowych cechują się znacznie mniejszym zróżnicowaniem, niż ma to miejsce w przypadku wskaźnika  $RCA$ . Porównując wartości współczynników asymetrii podane w tabelach 1 i 2, można

stwierdzić, że asymetria w rozkładach wskaźnika  $RCA$  jest silna i prawostronna, natomiast rozkłady wartości wskaźnika  $RCA_k^{(0,5)}$  cechują się zazwyczaj słabą asymetrią prawostronną lub lewostronną.

Aby zbadać, w jakim stopniu rozkłady wskaźników  $RCA$  i  $RCA_k^{(a)}$  mogą być wrażliwe na rodzaj grupy towarowej, dla której są obliczane, wyznaczono wartości miernika stabilności struktury (4) dla porównywanych par grup towarowych zgodnych z nomenklaturą SITC. Uprzednio wartości wskaźników  $RCA$  i  $RCA_k^{(a)}$  obliczone dla roku 2009 zostały pogrupowane w szeregi rozdzielcze przedziałowe składające się z 20 przedziałów. Spełniono przy tym postulat podziału rozłącznego i wyczerpującego [Sobczyk 2000]. W większości przypadków tworzone szeregi o jednakowych interwałach klasowych, z wyjątkiem sytuacji występowania obserwacji odstających – wówczas wprowadzano otwarte skrajne klasy w szeregu statystycznym. Wyniki obliczeń przedstawiono w tabelach 3 i 4.

Tabela 3. Wartości miernika stabilności struktury dla rozkładu wartości wskaźnika  $RCA$  obliczonego w poszczególnych grupach towarowych SITC dla Polski względem Niemiec jako kraju odniesienia

Grupa towarowa	SITC 5	SITC 6	SITC 7	SITC 8
SITC 0	0,222	0,152	0,194	0,190
SITC 5	×	0,214	0,151	0,129
SITC 6	×	×	0,338	0,057
SITC 7	×	×	×	0,056

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych Eurostatu.

W tabeli 3 ilustrującej wartości miernika stabilności struktury dla rozkładów wskaźnika  $RCA$  znajdują się dwa wyniki mniejsze od 0,1 wskazujące na stabilność otrzymanych rozkładów dla następujących par grup towarowych: artykuły przemysłowe klasyfikowane według materiałów i inne wyroby przemysłowe oraz maszyny, urządzenia i środki transportu i inne wyroby przemysłowe. W tabeli 4 zawierającej wartości wskaźnika stabilności struktury dla rozkładu wartości wskaźnika  $RCA_k^{(a)}$  (dla wybranych wartości parametru  $a^3$ ) liczba wyników mniejszych od 0,1 wzrasta wraz ze zmniejszeniem poziomu parametru  $a$ . W przypadku parametru  $a$  równego 1 uzyskano 5 wartości miernika (4) wskazujących na stabilność rozkładu skorygowanego wskaźnika  $RCA$  względem rozpatrywanych grup towarowych SITC. Dla wartości parametru  $a$  wynoszących kolejno 0,5, 0,2 i 0,1 liczba takich rezultatów była równa odpowiednio 7, 9 i 10.

<sup>3</sup> Uwzględnienie kilku wartości parametru  $a$  stwarza możliwości bardziej wszechstronnej oceny konkurencyjności eksportu przy różnym zakresie empirycznych wartości wskaźnika  $RCA_k^{(a)}$ .

Tabela 4. Wartości miernika stabilności struktury dla rozkładu wartości wskaźników  $RCA_k^{(a)}$  obliczonych w poszczególnych grupach towarowych SITC dla Polski względem Niemiec jako kraju odniesienia

Wskaźnik	$RCA_k^{(1)}$				$RCA_k^{(0,5)}$			
	SITC 5	SITC 6	SITC 7	SITC 8	SITC 5	SITC 6	SITC 7	SITC 8
Grupa towarowa								
SITC 0	0,124	0,074	0,116	0,092	0,122	0,062	0,024	0,080
SITC 5	×	0,116	0,053	0,044	×	0,104	0,041	0,042
SITC 6	×	×	0,240	0,092	×	×	0,238	0,090
SITC 7	×	×	×	0,111	×	×	×	0,099
Wskaźnik	$RCA_k^{(0,2)}$				$RCA_k^{(0,1)}$			
	SITC 5	SITC 6	SITC 7	SITC 8	SITC 5	SITC 6	SITC 7	SITC 8
Grupa towarowa								
SITC 0	0,019	0,043	0,032	0,068	0,010	0,021	0,014	0,055
SITC 5	×	0,091	0,059	0,046	×	0,055	0,029	0,041
SITC 6	×	×	0,147	0,017	×	×	0,035	0,013
SITC 7	×	×	×	0,001	×	×	×	0,018

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych Eurostatu.

Otrzymane rezultaty pozwalają przypuszczać, że rozkłady wartości wskaźnika  $RCA_k^{(a)}$  obliczone dla Polski względem Niemiec jako kraju odniesienia w rozważanych grupach SITC są bardziej stabilne, niż ma to miejsce w przypadku rozkładów wskaźnika  $RCA$ . Wydaje się więc, że rozkłady wartości wskaźnika  $RCA_k^{(a)}$  są mniej wrażliwe na wybór grupy towarowej SITC w porównaniu z rozkładami wartości wskaźnika  $RCA$ .

## 5. Wyniki badania przewagi komparatywnej Polski nad Niemcami w ujęciu czasowym

W dalszej części analizy obliczono wartości wskaźników przewagi komparatywnej dla Polski względem Niemiec jako kraju referencyjnego w kolejnych latach 2005–2009. W tabeli 5 przedstawiono wybrane charakterystyki liczbowe w rozkładzie wartości wskaźnika Balassy w latach 2005–2009 (przed wykonaniem obliczeń usunięto 10% obserwacji ekstremalnych).

Przeciętne wartości wskaźnika  $RCA$  we wszystkich badanych latach zawarte są w przedziale liczbowym od 1 do 2, co wskazuje na słabą przewagę komparatywną polskiego eksportu. O tym, że wniosek co do występowania przewagi konkurencyjnej polskiego handlu zagranicznego nad Niemcami jest błędny, można się przekonać, analizując wartości mediany w tabeli 6 (wszystkie są ujemne), jak również przeciętne wartości skorygowanego wskaźnika ujawnionej przewagi

komparatywnej przedstawione w tabeli 6 (wszystkie są mniejsze od 0). To brak unormowania wskaźnika Balassy implikuje zawyżenie przeciętnego poziomu konkurencyjności polskiego eksportu. W rzeczywistości w żadnym z badanych okresów Polska nie miała przewagi komparatywnej nad Niemcami, czego w szczególności dowodzą charakterystyki liczbowe rozkładów wskaźnika (3) (w obliczeniach przyjęto  $a = 0,5$ ).

Tabela 5. Wybrane charakterystyki rozkładu wartości wskaźnika  $RCA$  obliczonego w latach 2005–2009 dla Polski względem Niemiec jako kraju odniesienia w 2009 r.

Charakterystyka liczbowa	Lata				
	2005	2006	2007	2008	2009
Średnia	1,503	1,419	1,465	1,352	1,206
Mediana	0,523	0,570	0,578	0,587	0,516
Minimum	0,008	0,008	0,009	0,012	0,011
Maksimum	17,427	13,821	14,951	12,478	11,876
Kwartyl dolny	0,146	0,162	0,170	0,183	0,145
Kwartyl górny	1,697	1,671	1,706	1,602	1,501
Odchylenie standardowe	2,492	2,174	2,286	1,987	1,772
Współczynnik asymetrii	3,128	2,804	2,941	2,703	2,742

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych Eurostatu.

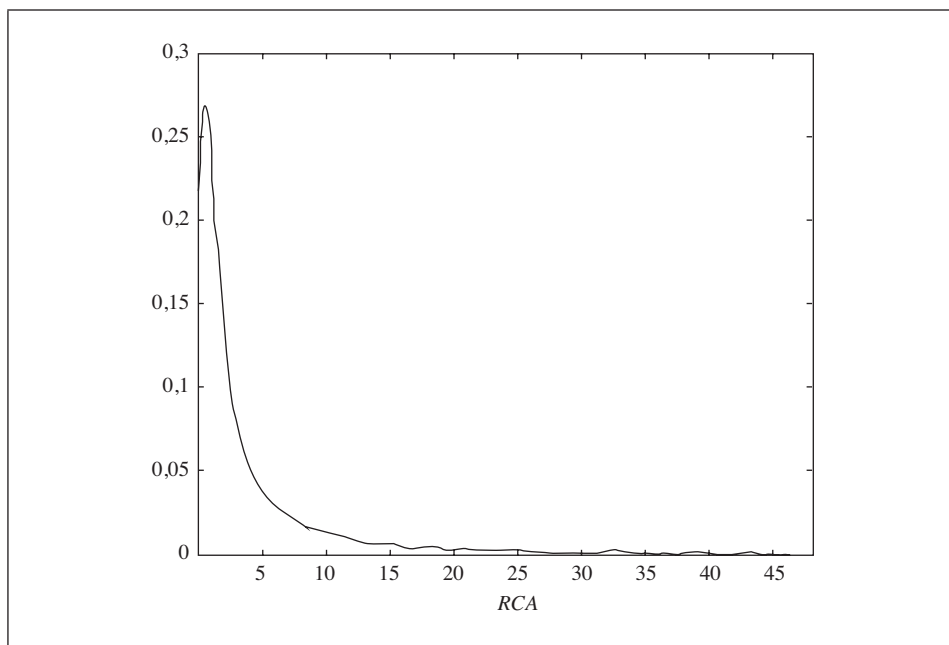
Tabela 6. Wybrane charakterystyki rozkładu wartości wskaźnika  $RCA_k^{(0,5)}$  obliczonego w latach 2005–2009 dla Polski względem Niemiec jako kraju odniesienia

Charakterystyka liczbowa	Lata				
	2005	2006	2007	2008	2009
Średnia	-0,156	-0,149	-0,139	-0,141	-0,169
Mediana	-0,161	-0,139	-0,136	-0,132	-0,164
Minimum	-0,838	-0,831	-0,823	-0,804	-0,811
Maksimum	0,613	0,576	0,589	0,559	0,550
Kwartyl dolny	-0,447	-0,427	-0,416	-0,401	-0,448
Kwartyl górny	0,131	0,128	0,133	0,117	0,101
Odchylenie standardowe	0,364	0,352	0,347	0,336	0,337
Współczynnik asymetrii	0,030	-0,012	0,004	-0,013	0,015

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych Eurostatu.

Analiza współczynników asymetrii w tabelach 5 i 6 wskazuje na silną asymetrię prawostronną w rozkładach oryginalnego wskaźnika Balassy oraz słabą asymetrię prawostronną lub lewostronną w rozkładach skorygowanego wskaźnika  $RCA$ .

Na rys. 1 i 2 przedstawiono przykładową aproksymację empirycznych rozkładów wartości wskaźników  $RCA$  i  $RCA_k^{(a)}$  za pomocą funkcji gęstości, opartą na danych pochodzących z 2009 r. W tym celu zastosowano estymację jądrową z gaussowską funkcją bazową i jednostkowym odchyleniem standardowym.

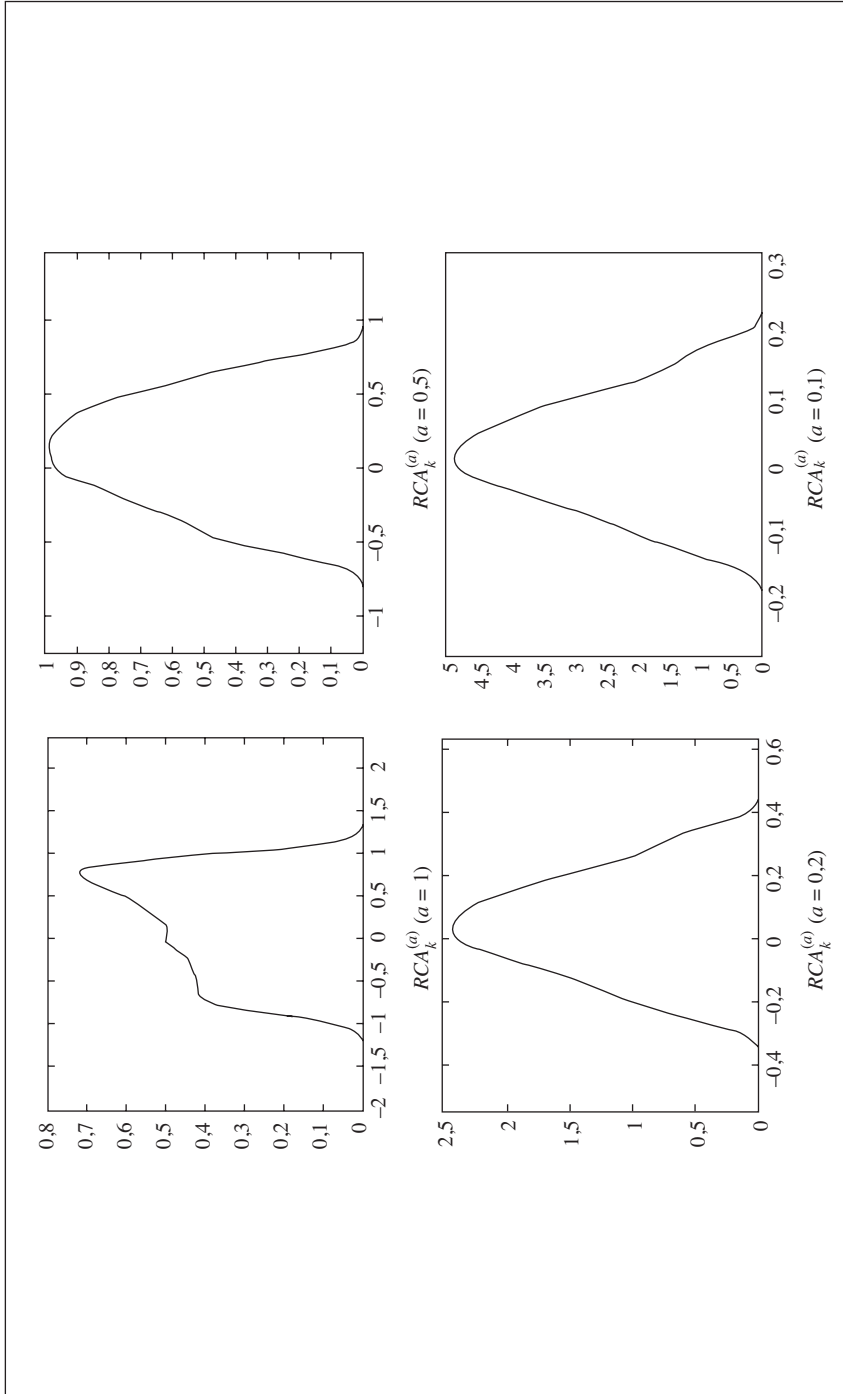


Rys. 1. Wykresy gęstości rozkładu wskaźnika  $RCA$  dla Polski względem Niemiec jako kraju odniesienia w 2009 r.

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych Eurostatu.

Rozkład wartości wskaźnika  $RCA$  (rys. 1) cechuje się bardzo silną asymetrią prawostronną. Z kolei kształt krzywych przedstawionych na rys. 2 wskazuje, że zastosowanie wskaźnika  $RCA_k^{(a)}$  w ocenie ujawnionej przewagi komparatywnej dostarcza rozkładów o znacznie wyższym stopniu symetrii. Stopień tej symetrii rośnie wraz ze zmniejszaniem wartości parametru  $a$ . Jednocześnie kształt funkcji gęstości staje się coraz bardziej zbliżony do rozkładu normalnego.

Do zbadania stabilności empirycznych rozkładów wskaźników  $RCA$  i  $RCA_k^{(a)}$  w latach 2005–2009 zastosowano wskaźnik stabilności rozkładu struktury (4). W tym celu wartości wskaźników  $RCA$  i  $RCA_k^{(a)}$  w badanych latach zostały pogrupowane w szeregi rozdzielcze przedziałowe (według zasad zaprezentowanych w punkcie 4 artykułu).



Rys. 2. Wykresy gęstości rozkładu wskaźnika  $RCA_k^{(a)}$  dla Polski względem Niemiec jako kraju odniesienia w 2009 r. dla wybranych wartości parametru  $a$

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych Eurostatu.



W tabeli 7 przedstawiono wyniki wskaźnika stabilności struktury dla rozkładów wartości wskaźnika Balassy obliczonych dla Polski w latach 2005–2009.

Tabela 7. Wartości miernika stabilności struktury dla rozkładu wartości wskaźnika  $RCA$  obliczonych w latach 2005–2009 dla Polski względem Niemiec jako kraju odniesienia

Lata	2005	2006	2007	2008
2006	0,089	×	×	×
2007	0,099	0,146	×	×
2008	0,187	0,235	0,200	×
2009	0,234	0,147	0,257	0,111

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych Eurostatu.

Na podstawie tabeli 7 można stwierdzić, że jedynie dwie wartości wskaźnika stabilności rozkładu są mniejsze od 0,1. Za stabilny rozkład empiryczny wskaźnika Balassy można uznać rozkład w 2006 r. w porównaniu z 2005 r., a także rozkład w 2007 r. w porównaniu z 2005 r.

W tabeli 8 podano wartości miernika (4) dla wskaźników  $RCA_k^{(1)}$ ,  $RCA_k^{(0,5)}$ ,  $RCA_k^{(0,2)}$  i  $RCA_k^{(0,1)}$  obliczonych dla Polski w latach 2005–2009.

Tabela 8. Wartości miernika stabilności struktury dla rozkładu wartości wskaźników  $RCA_k^{(a)}$  obliczonych w latach 2005–2009 dla Polski względem Niemiec jako kraju odniesienia

Wskaźnik	$RCA_k^{(1)}$				$RCA_k^{(0,5)}$			
	2005	2006	2007	2008	2005	2006	2007	2008
Lata	2005	2006	2007	2008	2005	2006	2007	2008
2006	0,005	×	×	×	0,001	×	×	×
2007	0,011	0,054	×	×	0,012	0,034	×	×
2008	0,321	0,245	0,098	×	0,145	0,238	0,009	×
2009	0,258	0,254	0,344	0,080	0,071	0,167	0,052	0,001
Wskaźnik	$RCA_k^{(0,2)}$				$RCA_k^{(0,1)}$			
	2005	2006	2007	2008	2005	2006	2007	2008
Lata	2005	2006	2007	2008	2005	2006	2007	2008
2006	0,011	×	×	×	0,001	×	×	×
2007	0,013	0,295	×	×	0,052	0,037	×	×
2008	0,051	0,102	0,083	×	0,099	0,084	0,005	×
2009	0,002	0,045	0,055	0,047	0,019	0,018	0,098	0,042

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych Eurostatu.

Na podstawie rezultatów przedstawionych w tabeli 8 można stwierdzić, że liczba wyników świadczących o stabilności rozkładów miernika (3) dla porów-

nywanych par lat wzrasta wraz ze zmniejszaniem wartości parametru  $a$ . Dla wskaźnika  $a = 1$  można odnotować 5 wartości mniejszych od 0,1, dla  $a = 0,5$  zaobserwowano 7 takich wyników, natomiast dla  $a = 0,2$  i  $a = 0,1$  było odpowiednio 8 i 10 wartości świadczących o stabilności rozkładów skorygowanego wskaźnika przewagi komparatywnej. Reasumując, można stwierdzić, że uzyskane wyniki konkurencyjności polskiego eksportu wykazują dużo wyższą stabilność w czasie w przypadku zmodyfikowanego wskaźnika  $RCA$  niż klasycznego wskaźnika Balassy.

## 6. Podsumowanie

Wyniki badań pokazują, że wskaźnik Balassy zawyża faktyczny poziom ujawnionej przewagi komparatywnej kraju. Zaproponowana w artykule modyfikacja tego miernika wydaje się do pewnego stopnia eliminować jego wady. Znajduje to potwierdzenie w wynikach badań empirycznych przeprowadzonych na przykładzie Polski i Niemiec jako kraju referencyjnego. Na podstawie charakterystyk liczbowych rozkładów skorygowanego wskaźnika względnej przewagi komparatywnej stwierdzić można, że Polska nie wykorzystwała przewagi komparatywnej nad Niemcami w żadnym z badanych lat, a jej eksport nie był konkurencyjny w rozpatrywanych grupach towarowych z wyjątkiem grupy żywność i zwierzęta żywe. Wartości skorygowanego wskaźnika  $RCA$  są unormowane w przedziale  $[-1; 1)$ , co umożliwia ich łatwą interpretację. Wartości  $RCA_k^{(a)}$  generują rozkłady znacznie bardziej symetryczne, niż ma to miejsce w przypadku rozkładów wskaźnika  $RCA$ . Rozkłady te są również bardziej stabilne w czasie i mniej wrażliwe na rodzaj grupy towarowej. Ułatwia to porównywalność konkurencyjności eksportu w ujęciu czasowym i towarowym.

## Literatura

- Balassa B. [1965], *Trade Liberalisation and 'Revealed' Comparative Advantage*, Manchester School of Economics and Social Studies 33.
- Czarny E., Śledziewska K. [2009], *Polska w handlu światowym*, PWE, Warszawa.
- Dalum B., Laursen K., Villumsen G. [1998], *Structural Change in OECD Export Specialization Patterns: Despecialization and 'Stickiness'*, „International Review of Applied Economics”, vol. 12 (3).
- Hinloopen J., van Marrewijk C. [2001], *On the Empirical Distribution of the Balassa Index*, *Weltwirtschaftliches Archiv*, 137, No. 1.
- Hoen A.R., Oosterhaven J. [2006], *On the Measurement of Comparative Advantage*, *The Annals of Regional Science*, vol. 40 (3), Springer-Verlag.

- Iapadre P.L. [2001], *Measuring International Specialization*, „International Advances in Economic Research”, vol. 7 (2).
- Misala J. [2011], *Międzynarodowa konkurencyjność gospodarki narodowej*, PWE, Warszawa.
- Olson D.L., Wu D.D. [2008], *Enterprise Risk Management*, World Scientific Publishing Co. Pte Ltd.
- Sobczyk M. [2000], *Statystyka. Podstawy teoretyczne, przykłady, zadania*, Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin.
- Szymanik E. [2004], *Konkurencyjność eksportu na przykładzie wymiany Polski z krajami Unii Europejskiej*, Acta Academiae Modrevianae, Krakowskie Towarzystwo Edukacyjne, Kraków.
- Urban R. [2003], *Analiza przewag komparatywnych na poziomie przemysłu rolno-spożywczego*, Instytut Ekonomiki Rolnictwa i Gospodarki Żywnościowej, Warszawa.
- Yu R., Cai J., Leung P. [2000], *The Normalized Revealed Comparative Advantage Index*, The Annals of Regional Science, vol. 43 (1), Springer-Verlag.

### **Research on Export Competitiveness in Poland Using the Adjusted Revealed Comparative Advantage Index**

The Balassa index (Revealed Comparative Advantage Index – RCA index) is used to estimate a country's export attractiveness and comparative advantage by industry sectors or commodity groups. Because it ranges from 0 to  $\infty$ , the measure has many drawbacks. Its empirical distribution is strongly asymmetric and is not stable in time. The Revealed Comparative Advantage Index distribution is strongly dependent on the number of reference countries, industries and commodity groups. As a result, some parameters of the RCA index distribution are not stable. These problematic properties render its outcomes incomparable across time and space.

The paper proposes a transformation of the RCA index measure into a new index ranging from  $-1$  to  $1$  by using a special class of rational functions. The new measure has a symmetric distribution with a stable mean and is independent of industry sectors and commodity groups. The adjusted Revealed Comparative Index was used to research export competitiveness in Poland as compared with Germany. The article compares the stability of the empirical distribution of the Adjusted Revealed Comparative Index and Balassa index across time and according to commodity groups. The data used come from Eurostat on Polish and German export and import commodities by Standard International Trade Classification (SITC) in 2005–2009.

**Keywords:** RCA index, Balassa index, export, international trade.



*Paweł Najman*  
Katedra Matematyki  
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

# Domknięcie i stabilność Bondy'ego-Chvátala grafów zwykłych – idee, formalizacje, uzupełnienia

## Streszczenie

W artykule zaprezentowano wyniki badań związanych ze stabilnością wybranych własności grafów zwykłych. Przedstawiono genezę i definicję  $k$ -domknięcia oraz stabilności Bondy'ego-Chvátala, a następnie rezultaty dotyczące stabilności własności grafów zwykłych, dla których stabilność została dokładnie ustalona. Podano także przykłady prac, w których wykorzystano pojęcie domknięcia lub stabilności.

**Słowa kluczowe:** domknięcie Bondy'ego-Chvátala, stabilność Bondy'ego-Chvátala, własność grafów, grafy zwykłe.

## 1. Wprowadzenie

Celem artykułu jest przedstawienie wyników badań związanych ze stabilnością wybranych własności grafów zwykłych. Praca ma po części charakter noty bibliograficznej – wskazano w niej także szerszą dokumentację źródłową w celu prześledzenia aktualnych trendów i implikacji prezentowanych kluczowych (historycznych już) wyników.

Przedstawiono genezę i definicję  $k$ -domknięcia oraz stabilności Bondy'ego-Chvátala, a następnie wyniki dotyczące stabilności własności grafów zwykłych,

dla których stabilność została dokładnie ustalona. Większość twierdzeń zostało podanych bez dowodu. Przedstawiono przede wszystkim te dowody twierdzeń, w których zdecydowano się podać uzupełnienia. Na zakończenie zaprezentowane zostały przykłady prac, w których wykorzystano pojęcie domknięcia lub stabilności.

Zapoczątkowany przez O. Orego [1960] kierunek badań nad grafami Hamiltona polegający na rozważaniu sumy stopni dwóch niepołączonych wierzchołków danego grafu osiągnął szczyt w 1976 r., kiedy to J.A. Bondy i V. Chvátal [1976] wprowadzili pojęcie  $k$ -domknięcia grafu i stabilności własności grafów. Dla liczby całkowitej nieujemnej  $k$ ,  $k$ -domknięciem  $cl_k(G)$  grafu  $G$  nazywamy graf otrzymany z grafu  $G$  przez kolejne dodawanie krawędzi między niepołączonymi wierzchołkami, których suma stopni jest nie mniejsza niż  $k$ , aż takich wierzchołków nie będzie. J.A. Bondy i V. Chvátal [1976] pokazali, że pojęcie domknięcia jest dobrze zdefiniowane, czyli jest jednoznacznie wyznaczone przez graf  $G$  bez względu na kolejność dodawania krawędzi.

Niech  $k$  będzie liczbą całkowitą. Własność  $P$  zdefiniowana dla wszystkich grafów rzędu  $n$  jest  $k$ -stabilna, gdy prawdziwa jest implikacja: jeśli dla dowolnego grafu  $G$  rzędu  $n$  i dla dowolnych dwóch niepołączonych wierzchołków  $u$  oraz  $v$  grafu  $G$  takich, że  $d_G(u) + d_G(v) \geq k$ , graf  $G + uv$  ma własność  $P$ , to graf  $G$  ma własność  $P$ . Liczba  $k$  zwykle zależy od liczby wierzchołków  $n$  grafu  $G$ . Stabilność  $s(P)$  własności  $P$  to najmniejsza liczba całkowita taka, że własność  $P$  jest  $k$ -stabilna. Pojęcia te otworzyły nowy horyzont badań grafów hamiltonowskich i innych własności grafów. Koncepcja domknięcia odgrywa bardzo ważną rolę w badaniach dotyczących istnienia cykli, ścieżek i innych podgrafów w grafach, nie tylko zwykłych.

J.A. Bondy i V. Chvátal [1976], wykorzystując dowód twierdzenia O. Orego [1960], pokazali, że jeżeli  $u$  oraz  $v$  są dwoma niepołączonymi wierzchołkami grafu  $G$  takimi, że  $d_G(u) + d_G(v) \geq n$ , to graf  $G$  jest hamiltonowski wtedy i tylko wtedy, gdy graf  $G + uv$  jest hamiltonowski. Konsekwencją tego twierdzenia jest twierdzenie, że jeśli  $G$  jest grafem takim, że  $n = |V(G)| \geq 3$  i  $cl_n(G)$  jest grafem pełnym, to graf  $G$  jest hamiltonowski.

Mimo że czasami trudniej jest sprawdzić własność  $P$  w grafie  $cl_n(G)$  niż w grafie  $G$ , za to graf „bliższy” grafowi  $K_n$  ma wiele interesujących własności. Teoria domknięcia opiera się na fakcie, który zauważyli J.A. Bondy i V. Chvátal [1976], że jeśli własność  $P$  jest  $k$ -stabilna i graf  $cl_k(G)$  posiada własność  $P$ , to graf  $G$  też posiada tę własność.

Autorzy ci pokazali [1976], że graf  $cl_n(G)$  może być skonstruowany z wykorzystaniem algorytmu działającego w czasie wielomianowym  $O(n^4)$ . Wynik ten został poprawiony przez J.L. Szwarcfitera [1987] –  $O(n^3)$ . Jeszcze inny algorytm działający w czasie  $O(n^3)$  podał S. Khuller [1989], a złożoność obliczeniową otrzymania grafu

$cl_n(G)$  wyznaczył A. Monti [1996]. Co więcej, J.A. Bondy i V. Chvátal pokazali, że jeśli  $cl_n(G) = K_n$ , to dowolny cykl hamiltonowski w grafie  $K_n$  może być przetransformowany do cyklu Hamiltona w grafie  $G$  w czasie  $O(n^3)$ . Z tych dwóch rezultatów wynika, że znalezienie cyklu Hamiltona w grafie, dla którego  $cl_n(G) = K_n$ , jest problemem wielomianowym, a ogólnie jest to problem NP-zupełny.

Zainspirowanie się badaczy przedstawionymi wynikami przyczyniło się do rozwinięcia innych koncepcji domknięć. Większość z nich opiera się na warunkach sumy stopni niepołączonych wierzchołków z pewnym globalnym parametrem grafu, a niektóre dotyczą lokalnej struktury grafu. Wadą metody domknięcia Bondy'ego-Chvátala jest to, że  $cl_n(G)$  może być grafem pełnym tylko wtedy, gdy  $|E(G)| \geq [0,125(n+2)^2]$  [Clark, Entringer i Jackson 1980].

J.A. Bondy i V. Chvátal [1976] ustalili stabilność dla wielu własności grafów. Ogólna metoda przeprowadzonego przez nich dowodu jest następująca. Najpierw dowodzi się, że dana własność jest  $k$ -stabilna. Następnie podaje się przykład grafu, który pokazuje, że uzyskana wartość  $k$  jest najmniejsza z możliwych, co ustala stabilność danej własności grafów.

W 1995 r. D. Amar i in. [1995] rozpoczęli studia nad domknięciem i stabilnością zrównoważonych grafów dwudzielnych. Dokonali podsumowania znanych wyników badań oraz ustalili bistabilność dla kilku znanych własności grafów dwudzielnych zrównoważonych.

W kolejnym punkcie artykułu przytoczone zostały definicje i oznaczenia używanych w nim pojęć. W przeważającej części notacja jest zgodna z zastosowaną w pracach J.A. Bondy'ego i U.S.R. Murthy'ego [1976] oraz F. Harary'ego [1969].

## 2. Podstawowe definicje i oznaczenia

Liczbę elementów zbioru  $X$  oznaczamy jako  $|X|$  oraz  $[X]^2 := \{S: S \subseteq X, |S| = 2\}$ . Grafem zwykłym nazywamy parę  $G = (V, E)$ , gdzie  $V$  jest niepustym zbiorem skończonym i  $E \subseteq [V]^2$ . Zbiór wierzchołków i zbiór krawędzi grafu  $G$  oznaczamy odpowiednio jako  $V(G)$  i  $E(G)$ , a przez  $|V(G)| = n$  oznaczamy rząd grafu.

Krawędź łączącą wierzchołki  $u$  oraz  $v$  oznaczamy przez  $uv$ , wtedy wierzchołek  $u$  oraz krawędź  $e = uv$  nazywamy incydentnymi.

Graf  $H$  nazywamy podgrafem grafu  $G$ , jeśli  $V(H) \subseteq V(G)$  i  $E(H) \subseteq E(G)$ . Mówimy wtedy, że graf  $G$  zawiera albo posiada graf  $H$ . Podgraf  $H$  grafu  $G$  nazywamy grafem częściowym (podgrafem) grafu  $G$ , jeśli  $V(H) = V(G)$ . Podgrafem grafu  $G$  indukowanym przez zbiór  $W \subseteq V(G)$  nazywamy graf  $G[W] := (W, E(G) \cap \cap [W]^2)$ . Jeśli  $v \in V(G)$ ,  $e \in E(G)$  i  $W \subseteq V(G)$ , to  $G - v := G[V(G) \setminus \{v\}]$ ,  $G - e := (V(G), E(G) \setminus \{e\})$  i  $G - W := G[V(G) \setminus W]$ , a także  $G + e := (V(G), E(G) \cup \{e\})$ .

Jeśli  $v \in V(G)$ , to przez  $N_G(v)$  oznaczamy zbiór wierzchołków połączonych (sąsiadujących) z wierzchołkiem  $v$  w grafie  $G$ . Stopień wierzchołka  $v$  w grafie  $G$  oznaczamy jako  $d_G(v)$  i  $d_G(v) := |N_G(v)|$ , natomiast minimalny i maksymalny stopień wierzchołków grafu oznaczamy odpowiednio jako  $\delta(G)$  i  $\Delta(G)$ . Graf  $G$  nazywamy  $r$ -regularnym, jeśli każdy jego wierzchołek jest stopnia  $r$ .

Niech  $G_1 = (V_1, E_1)$  i  $G_2 = (V_2, E_2)$  będą grafami wierzchołkowo rozłącznymi. Połączenie grafów  $G_1 * G_2$  definiujemy następująco:  $G_1 * G_2 := (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup E_{1,2})$ , gdzie  $E_{1,2} := \{uv : u \in V_1, v \in V_2\}$ . Sumę grafów  $G_1 \cup G_2$  definiujemy następująco:  $G_1 \cup G_2 := (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ . Ponadto przez  $kG$  oznaczamy sumę  $k$  kopii grafu  $G$ , a graf  $kK_2$  nazywamy skojarzeniem. Wtedy liczbę  $k$  nazywamy rozmiarem skojarzenia.

Graf nazywamy spójnym, jeśli nie można go przedstawić w postaci sumy dwóch grafów o rozłącznych zbiorach wierzchołków.

Graf zwykły na  $n$  wierzchołkach taki, że każdy wierzchołek jest połączony ze wszystkimi pozostałymi, nazywamy grafem pełnym i oznaczamy jako  $K_n$ . Spójny graf zwykły dwuregularny na  $n \geq 3$  wierzchołkach nazywamy cyklem i oznaczamy jako  $C_n$ . Cykl zawierający wszystkie wierzchołki grafu nazywamy cyklem Hamiltona, a graf, który posiada cykl Hamiltona, nazywamy grafem hamiltonowskim.

Ścieżką  $P_n$  nazywamy graf powstały z cyklu  $C_n$  przez usunięcie jednej krawędzi. Ścieżkę zawierającą wszystkie wierzchołki grafu nazywamy ścieżką Hamiltona.

O grafie niezawierającym cyklu mówimy, że jest acykliczny. Graf spójny acykliczny określany jest mianem drzewa. Wierzchołek stopnia pierwszego w drzewie nazywamy liściem.

Dopełnieniem  $\bar{G}$  grafu  $G$  nazywamy graf taki, że  $V(\bar{G}) = V(G)$  i  $e \in E(\bar{G})$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $e \notin E(G)$ .

Grafem  $p$ -dzielnym nazywamy graf  $G$ , którego zbiór wierzchołków można podzielić na  $p$  niepustych rozłącznych podzbiorów  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  tak, aby każda krawędź grafu  $G$  łączyła wierzchołek ze zbioru  $X_i$  z wierzchołkiem ze zbioru  $X_j$ ,  $1 \leq i < j \leq p$ . Graf  $p$ -dzielny pełny oznaczamy przez  $K_{|X_1|, |X_2|, \dots, |X_p|}$ ; jest to taki graf  $p$ -dzielny, w którym każdy wierzchołek ze zbioru  $X_i$  jest połączony ze wszystkimi wierzchołkami ze zbioru  $X_j$ , dla  $i \neq j$  oraz  $1 \leq i, j \leq p$ . Grafem  $p$ -dzielnym zrównoważonym nazywamy taki graf  $p$ -dzielny, w którym  $|X_i| = |X_j|$ ,  $1 \leq i, j \leq p$ .

Niech  $f$  i  $g$  będą ciągami liczb rzeczywistych. Zapisujemy  $f(n) = O(g(n))$  wtedy, gdy istnieje stała dodatnia  $C$  taka, że  $|f(n)| \leq C|g(n)|$  dla dostatecznie dużych wartości  $n$ . Mówimy, że ciąg  $f(n)$  rośnie wielomianowo, jeśli  $f(n) = O(n^m)$  dla pewnej dodatniej liczby całkowitej  $m$ .



### 3. Geneza definicji $k$ -domknięcia i stabilności własności grafów

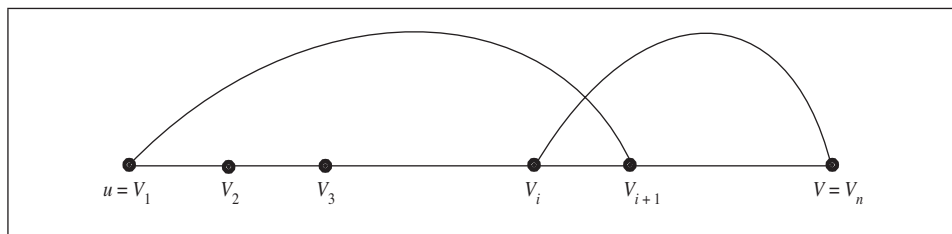
W niniejszym artykule wszelkie rezultaty odnoszą się do skończonych grafów, bez pętli i krawędzi wielokrotnych. Jeśli nie napisano inaczej, jako  $G$  oznaczono graf zwykły rzędu  $n$ .

Inspiracją do wprowadzenia definicji domknięcia grafu przez J.A. Bondy'ego i V. Chvátala [1976] było twierdzenie O. Ore'go [1960] opierające się na pomyśle: „jeśli graf ma wystarczająco dużo krawędzi właściwie ułożonych, jest hamiltonowski”. O. Ore rozważał sumę stopni każdej pary niepołączonych wierzchołków grafu.

*Twierdzenie 1.* Jeśli  $G$  jest grafem rzędu  $n \geq 3$  takim, że dla każdej pary niepołączonych wierzchołków  $u$  oraz  $v$  spełniony jest warunek  $d_G(u) + d_G(v) \geq n$ , to  $G$  jest grafem hamiltonowskim.

*Dowód.* Załóżmy, że przy spełnionych założeniach teza twierdzenia nie jest prawdziwa. Wtedy istnieje maksymalny niehamiltonowski graf  $G$  rzędu  $n \geq 3$  spełniający założenia twierdzenia. Oznacza to, że  $G$  nie jest grafem hamiltonowskim, ale dla każdej pary niepołączonych wierzchołków  $u$  i  $v$  tego grafu graf  $G + uv$  jest hamiltonowski. Skoro  $n \geq 3$ , graf  $G$  nie jest grafem pełnym.

Ustalmy dwa niepołączone wierzchołki  $u$  oraz  $v$  i rozważmy graf  $H = G + uv$ , który jest grafem hamiltonowskim. Zauważmy, że każdy cykl Hamiltona w grafie  $H$  musi zawierać krawędź łączącą wierzchołki  $u$  oraz  $v$ . Zatem w grafie  $G$  istnieje ścieżka Hamiltona, której wierzchołkami końcowymi są wierzchołki  $u$  oraz  $v$ , tzn.  $v_1 v_2 \dots v_n$ , gdzie  $v_1 = u$ ,  $v_n = v$ . Zauważmy jeszcze, że jeśli  $v_{i+1} \in N_G(u)$ , to  $v_i \notin N_G(v)$ , dla  $1 \leq i \leq n-2$ , bo w przeciwnym wypadku  $v_1 v_{i+1} v_{i+2} \dots v_n v_i v_{i-1}$  byłby cyklem Hamiltona w grafie  $G$  (zob. rys. 1).



Rys. 1. Ścieżka i możliwe połączenia

Źródło: opracowanie własne.

Dla każdego wierzchołka połączonego z  $u$  istnieje zatem wierzchołek ze zbioru  $V(G - v)$ , który nie jest połączony z  $v$ . Stąd otrzymujemy, że  $d_G(v) \leq n - 1 - d_G(u)$ , sprzeczność z  $d_G(u) + d_G(v) \geq n$ . ■

J.A. Bondy i V. Chvátal [1976] zauważyli, że właściwie O. Ore udowodnił coś więcej – pokazał, że:

*Twierdzenie 2.* Jeśli  $u$  oraz  $v$  są dwoma niepołączonymi wierzchołkami grafu  $G$  takimi, że  $d_G(u) + d_G(v) \geq n$ , to graf  $G$  jest hamiltonowski wtedy i tylko wtedy, gdy graf  $G + uv$  jest hamiltonowski.

*Dowód.* „ $\Rightarrow$ ” Jeżeli graf  $G$  jest hamiltonowski, to tym bardziej jest taki graf  $G + uv$ , otrzymany z  $G$  przez dodanie krawędzi łączących niepołączone wierzchołki o sumie stopni nie mniejszej niż  $n$ .

„ $\Leftarrow$ ” Załóżmy, że graf  $G + uv$  jest hamiltonowski, i przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że graf  $G$  nie jest hamiltonowski. Stosując dokładnie to samo postępowanie co w dowodzie twierdzenia Ore’go, otrzymujemy ostatecznie sprzeczność z założeniem o sumie stopni niepołączonych wierzchołków. ■

*Definicja 1.*  $k$ -domknięciem Bondy’ego-Chvátala grafu  $G$  rzędu  $n$ , oznaczanym przez  $cl_k(G)$ , nazywamy graf otrzymany z grafu  $G$  przez kolejne dodawanie krawędzi między niepołączonymi wierzchołkami  $u$  oraz  $v$  takimi, że  $d_G(u) + d_G(v) \geq k$ , aż takich wierzchołków nie będzie.

Łatwo zauważyć, że opisana operacja domknięcia grafu  $G$  rzędu  $n$  jest operacją skończoną (dodajemy krawędzie do momentu, aż nie będzie pary wierzchołków niepołączonych spełniających warunek o sumie stopni lub wszystkie wierzchołki będą parami połączone ze sobą). Pokażmy poprawność tej definicji. Skoro kolejność łączenia odpowiednich wierzchołków nie jest określona, musimy udowodnić, że  $cl_k(G)$  nie zależy od kolejności dodawania krawędzi.

*Twierdzenie 3.* Jeżeli  $G_1$  oraz  $G_2$  są dwoma grafami otrzymanymi z grafu  $G$  przez kolejne łączenie par niepołączonych wierzchołków o sumie stopni co najmniej równej  $k$ , to  $G_1 = G_2$ .

*Dowód.* Niech  $e_1, e_2, \dots, e_i$  oraz  $f_1, f_2, \dots, f_j$  będą odpowiednio ciągami krawędzi dodawanych w grafie  $G$  w celu uzyskania  $k$ -tych domknięć  $G_1$  oraz  $G_2$ . Pokażemy, że każda krawędź  $e_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, j$ , jest krawędzią grafu  $G_2$  oraz że każda krawędź  $f_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, j$ , jest krawędzią grafu  $G_1$ .

Dla dowodu nie wprost załóżmy, że  $e_p = uv$ ,  $p \in \{1, 2, \dots, i\}$ , jest pierwszą krawędzią w ciągu  $e_1, e_2, \dots, e_i$ , która nie należy do zbioru krawędzi grafu  $G_2$ .

Rozważmy graf  $H = G + \{e_1, e_2, \dots, e_{p-1}\}$ . Z definicji grafu  $G_1$  wynika, że

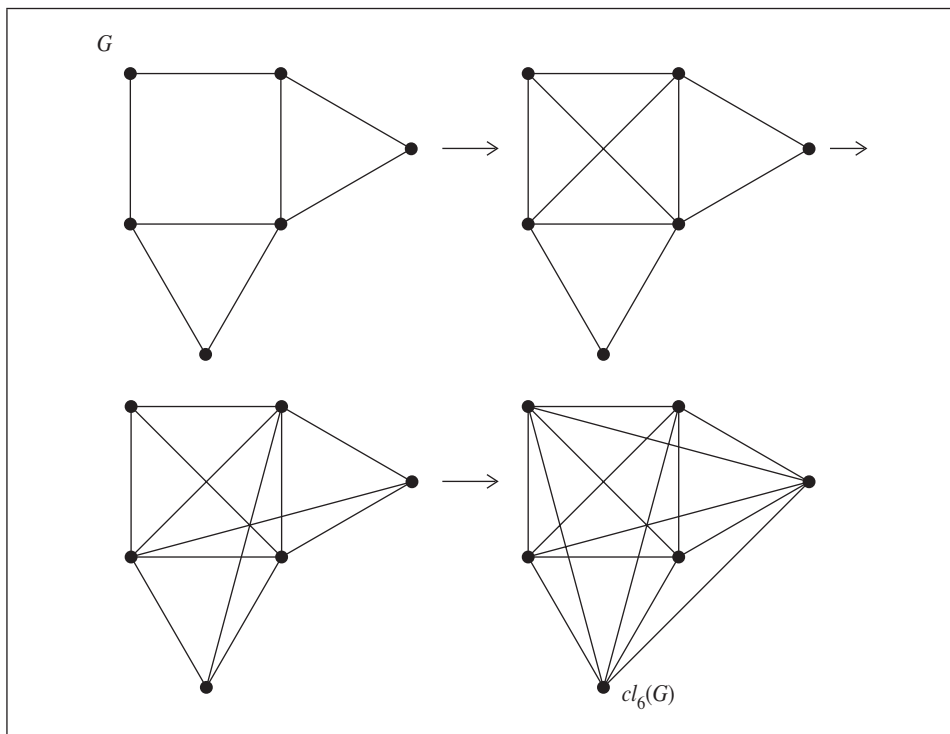
$$d_H(u) + d_H(v) \geq k,$$

gdyż  $G_1$  jest domknięciem grafu  $G$ . Ponadto z wyboru krawędzi  $e_p$  wynika, że  $H$  jest podgrafem grafu  $G_2$ , gdyż  $G_2 = G + \{e_1, e_2, \dots, e_{p-1}\} + \{f_p, f_{p+1}, \dots, f_j\}$ . Zatem

$$d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) \geq k,$$

czyli zgodnie z definicją domknięcia grafu  $G$  wierzchołki  $u$  oraz  $v$  są połączone w grafie  $G_2$ , więc krawędź  $e_p$  należy do zbioru krawędzi grafu  $G_2$ , co stanowi sprzeczność. Analogicznie dowodzimy, że każda krawędź  $f_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, j$ , należy do zbioru krawędzi grafu  $G_1$ . Wówczas otrzymujemy, że  $G_1 = G_2$ . ■

Rys. 2 przedstawia konstrukcję domknięcia  $cl_6(G)$ .



Rys. 2. Konstrukcja domknięcia  $cl_6(G)$

Źródło: opracowanie własne.

Łatwo zauważyć, że dla dowolnego grafu  $G$  rzędu  $n$

$$G = cl_{2n-3}(G) \subseteq cl_{2n-4}(G) \subseteq \dots \subseteq cl_1(G) \subseteq cl_0(G) = K_n,$$

gdzie  $H \subseteq G$  oznacza, że graf  $H$  jest grafem częściowym grafu  $G$ .

O ogromnym znaczeniu definicji domknięcia Bondy'ego-Chvátala w teorii grafów mówi następujące twierdzenie, będące podsumowaniem wcześniejszych rozważań.

*Twierdzenie 4.* Graf  $G$  rzędu  $n$  jest hamiltonowski wtedy i tylko wtedy, gdy jego  $n$ -domknięcie  $cl_n(G)$  jest grafem hamiltonowskim. W szczególności  $G$  jest grafem hamiltonowskim, gdy jego  $n$ -domknięcie jest grafem pełnym.

*Dowód.* „ $\Rightarrow$ ” Jeśli graf  $G$  jest hamiltonowski, to tym bardziej jest taki graf  $cl_n(G)$ , otrzymany z  $G$  przez dodanie krawędzi łączących niepołączone wierzchołki o sumie stopni nie mniejszej niż  $n$ .

„ $\Leftarrow$ ” Jeśli  $cl_n(G) = G$ , teza została udowodniona. Przypuśćmy, że  $cl_n(G) \neq G$ . Niech graf  $cl_n(G)$  powstaje z grafu  $G$  poprzez dodanie krawędzi  $e_1, e_2, \dots, e_r$ , gdzie  $r$  jest liczbą całkowitą dodatnią, tzn.  $cl_n(G) = G + e_1 + e_2 + \dots + e_r$ . Niech  $G_i = G + e_1 + \dots + e_i$ , dla  $i = 1, 2, \dots, r$ , wtedy  $G_r = cl_n(G) = G_{r-1} + e_r$ . Skoro graf  $cl_n(G)$  jest hamiltonowski i krawędź  $e_r$  została dodana między niepołączonymi wierzchołkami w grafie  $G_{r-1}$ , których suma stopni jest nie mniejsza niż  $n$ , to na mocy twierdzenia 2 graf  $G_{r-1}$  jest również hamiltonowski. Powtarzając przedstawione rozumowanie jeszcze  $r - 1$  razy, otrzymujemy, że graf  $G$  jest hamiltonowski.

Twierdzenie 4 znacznie upraszcza dowody licznych warunków wystarczających dla grafów hamiltonowskich, ponieważ warunek o sumie stopni nieincydentnych wierzchołków jest mocniejszy od wielu innych warunków wystarczających.

Poniżej przedstawiono pojęcie stabilności własności grafów.

*Definicja 2.* Dowolny zbiór grafów  $P$  nazywamy własnością  $P$ .

*Definicja 3.* Jeśli  $G \in P$  dla pewnego grafu  $G$ , to mówimy, że graf  $G$  ma własność  $P$ .

Niech  $P$  będzie własnością zdefiniowaną dla wszystkich grafów rzędu  $n$ .

*Definicja 4.* Własność  $P$  jest  $k$ -stabilna, gdy prawdziwa jest implikacja: jeżeli w dowolnym grafie  $G$  dla dowolnych dwóch niepołączonych wierzchołków  $u$  oraz  $v$  takich, że  $d_G(u) + d_G(v) \geq k$ , graf  $G + uv$  ma własność  $P$ , to graf  $G$  ma własność  $P$ .

Liczba  $k$  zwykle zależy od liczby wierzchołków  $n$  grafu  $G$ . Korzystając z definicji 4, możemy napisać: własność  $P$  jest  $k$ -stabilna, jeśli

$$\left. \begin{array}{l} G \text{ nie ma własności } P \\ u, v \in V(G) \text{ oraz } uv \notin E(G) \\ G + uv \text{ ma własność } P \end{array} \right\} \Rightarrow d_G(u) + d_G(v) < k.$$

Zauważmy, że każda  $k$ -stabilna własność jest  $(k + 1)$ -stabilna oraz że każda własność grafów  $G$  jest  $(2n - 3)$ -stabilna, ponieważ suma stopni niepołączonych wierzchołków w grafie  $G$  rzędu  $n$  nie przekracza  $(n - 2) + (n - 2) = 2n - 4$ .

*Definicja 5.* Stabilność  $s(P)$  własności  $P$  to najmniejsza liczba całkowita  $k$  taka, że własność  $P$  jest  $k$ -stabilna.

Na mocy definicji 5 oraz podanych uwag stabilność dowolnej własności  $P$  grafów spełnia nierówność  $s(P) \leq 2n - 3$ .

## 4. Stabilność wybranych własności grafów zwykłych

### 4.1. Najbardziej znane własności

Jeśli nie podano inaczej, przedstawione w tym punkcie artykułu wyniki pochodzą z pracy J.A. Bondy'ego i V. Chvátala [1976].

*Twierdzenie 5.* Własność  $P$ : „ $G$  jest hamiltonowski” spełnia  $s(P) = n$ .

*Dowód.* Korzystając z twierdzenia 2 oraz na mocy definicji 4, otrzymujemy, że własność „graf jest hamiltonowski” jest  $n$ -stabilna. Przykład grafu  $K_{n-1} \cup K_1$  plus jedna krawędź pomiędzy  $K_{n-1}$  i  $K_1$  pokazuje, że wartość  $n$  jest najmniejsza z możliwych<sup>1</sup>. ■

*Twierdzenie 6.* Własność  $P$ : „ $G$  zawiera cykl  $C_k$ ” spełnia

$$s(P) = \begin{cases} 2n - k & \text{dla } 3 \leq k \leq n, \text{ jeśli } k \text{ jest nieparzyste} \\ 2n - k - 1 & \text{dla } 6 \leq k < n, \text{ jeśli } k \text{ jest parzyste} \\ n & \text{dla } k \in \{4, n\} \end{cases}.$$

*Dowód.* 1° Udowodnijmy najpierw, że  $s(P) = 2n - k$ , jeśli  $4 \leq k \leq n$  i  $k$  jest nieparzyste, oraz że  $s(P) = n$  dla  $k = n$ . Jeśli graf  $G + uv$  zawiera cykl  $C_k$ , ale graf  $G$  go nie zawiera, to  $G$  zawiera ścieżkę  $u_1 u_2 \dots u_k$ , gdzie  $u_1 = u$ ,  $u_k = v$ . Niech  $H$  będzie podgrafem indukowanym przez zbiór wierzchołków  $\{u_i : 1 \leq i \leq k\}$ . Wtedy graf  $H + uv$  jest hamiltonowski, ale  $H$  nie jest hamiltonowski. Korzystając z twierdzenia 5 dla grafu  $H$ , mamy

$$d_G(u) + d_G(v) \leq 2(n - k) + d_H(u) + d_H(v) < 2(n - k) + k = 2n - k.$$

Niech  $k$  będzie liczbą nieparzystą. Rozważmy graf  $P_{k-2} \cup \bar{K}_{n-k+2}$ , oznaczając przez  $v_1, v_2, \dots, v_{k-2}$  wierzchołki ścieżki  $P_{k-2}$ , a przez  $v_{k-1}, v_k, \dots, v_{n-2}, u, v$  wierzchołki grafu  $\bar{K}_{n-k+2}$ . Wierzchołek  $u$  oraz wierzchołków  $v$  łączymy z wszystkimi wierzchołkami ze zbioru  $\{v_{2i-1} : 1 \leq i \leq 0,5(k-1)\} \cup \{v_{k-1}, v_k, \dots, v_{n-2}\}$ . Otrzymany w ten sposób przykład grafu<sup>2</sup> pokazuje, że wartość  $2n - k$  jest najmniejsza z możliwych, gdy  $k$  jest nieparzyste i  $3 \leq k \leq n$ . Jeśli  $n$  jest parzyste i  $k = n$ , to znów przykład grafu  $K_{n-1} \cup K_1$  plus jedna krawędź pomiędzy  $K_{n-1}$  i  $K_1$  pokazuje, że wartość  $2n - k = n$  jest najmniejsza z możliwych.

<sup>1</sup> Przykład ten omówiono również w pracy [Najman 2005].

<sup>2</sup> Uogólnienie podane przez autora w pracy [Najman 2005].

2° Niech  $k$  będzie liczbą parzystą taką, że  $4 \leq k < n$ . Jeśli graf  $G + uv$  zawiera cykl  $C_k$ , ale graf  $G$  go nie zawiera, to  $G$  zawiera ścieżkę  $u_1 u_2 \dots u_k$ , gdzie  $u_1 = u$ ,  $u_k = v$ . Niech  $H$  będzie podgrafem grafu  $G$  indukowanym przez zbiór wierzchołków  $\{u_i; 1 \leq i \leq k\}$ . Analogicznie jak w przypadku 1°  $d_H(u) + d_H(v) < k$ . Jeśli  $u$  i  $v$  nie mają wspólnego sąsiada na zewnątrz  $H$ , to tezę udowadniamy następująco:

$$d_G(u) + d_G(v) \leq n - k + d_H(u) + d_H(v) < n \leq 2n - k - 1.$$

Możemy zatem założyć, że  $u$  i  $v$  mają wspólnego sąsiada  $w$  na zewnątrz  $H$ . Niech

$$A := \{i; 2 \leq i \leq k, u \text{ jest połączony z } u_i\},$$

$$B := \{i; 2 \leq i \leq k, v \text{ jest połączony z } u_{i-1}\},$$

czyli  $d_H(u) = |A|$  i  $d_H(v) = |B|$ . Jeśli  $d_H(u) + d_H(v) < k - 1$ , to tezę udowadniamy następująco:

$$d_G(u) + d_G(v) \leq 2(n - k) + d_H(u) + d_H(v) < 2n - k - 1.$$

Możemy zatem założyć, że

$$|A| + |B| \geq k - 1. \quad (1)$$

Oprócz tego:

$$A \cap B = \emptyset, \quad (2)$$

ponieważ gdyby  $i \in A \cap B$ , to  $u_1 u_i u_{i+1} \dots u_k u_{i-1} \dots u_1$  byłby cyklem  $C_k$  w  $G$ .

Z (1) i (2) wynika, że

$$A \cup B = \{2, 3, \dots, k\}. \quad (3)$$

Zauważmy, że  $3 \notin A$ , w przeciwnym razie  $u_1 u_3 u_4 \dots u_k w u_1$  byłby cyklem  $C_k$  w  $G$ . Podobnie  $(k - 1) \notin B$ , w przeciwnym razie  $u_1 u_2 \dots u_{k-2} u_k w u_1$  byłby cyklem  $C_k$  w  $G$ . Zatem z (3) wynika, że  $3$  należy do  $B$  i  $(k - 1)$  należy do  $A$ ; to znaczy, że  $u_k$  jest połączony z  $u_2$  oraz  $u_1$  jest połączony z  $u_{k-1}$ .

Zauważmy, że

$$j \in A \Rightarrow (j + 1) \notin A, \quad (4)$$

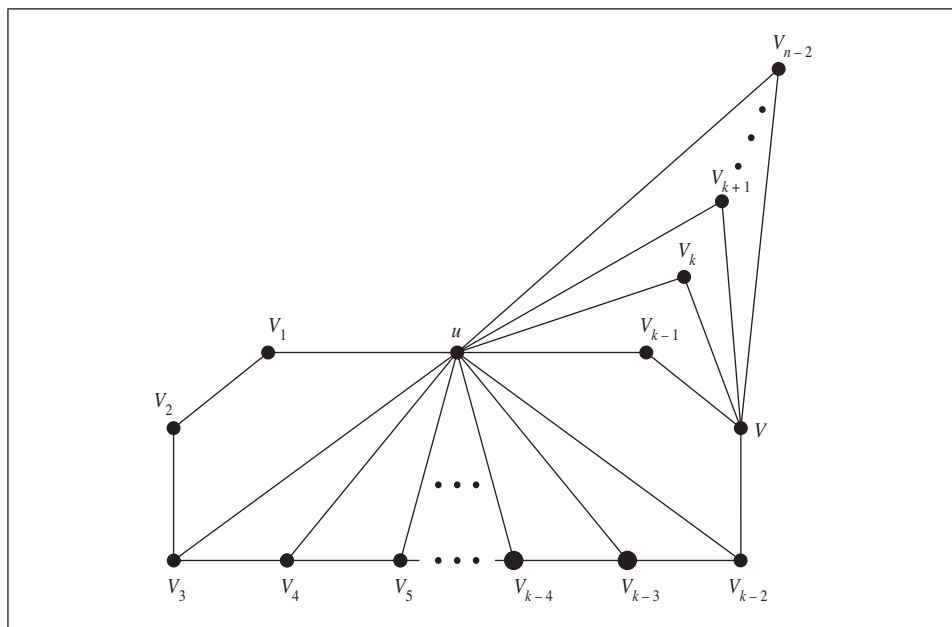
w przeciwnym razie  $u_1 u_{j+1} u_{j+2} \dots u_k u_2 u_3 \dots u_j u_1$  byłby cyklem  $C_k$  w  $G$ . Podobnie

$$j \in B \Rightarrow (j + 1) \notin B, \quad (5)$$

w przeciwnym razie  $u_k u_j u_{j+1} \dots u_{k-1} u_1 u_2 \dots u_{j-1} u_k$  byłby cyklem  $C_k$  w  $G$ .

Reasumując, z (3), (4), (5) oraz informacji, iż  $3 \in B$ , wynika, że każdy nieparzysty  $j$  ( $j \leq k$ ) należy do  $B$ . W szczególności  $(k - 1) \in B$ , co przeczy założeniu, że  $(k - 1) \notin B$ .

Przykład grafu<sup>3</sup> zamieszczonego na rys. 3 pokazuje, że wartość  $2n - k - 1$  jest najmniejsza z możliwych, gdy  $k \geq 6$  jest parzyste. Dla własności zawierania cyklu  $C_4$  uzyskujemy o wiele lepszy rezultat – stabilność wynosi  $n$  – będący konsekwencją twierdzenia 8 dla  $k = 2$ .



Rys. 3. Przykład grafu ustalający stabilność własności z drugiego przypadku z twierdzenia 6

Źródło: opracowanie własne.

W 2002 r. B. Randerath, I. Schiermeyer, M. Tewes i L. Volkmann [Randerath *et al.* 2002] zauważyli, że dowód twierdzenia 7 jest analogiczny do dowodu twierdzenia 6, wystarczy tylko przypisać dowolny wierzchołek  $v$  do cyklu długości  $k$ . Mamy zatem następujące twierdzenie.

*Twierdzenie 7. Własność P:* „ $G$  zawiera cykl  $C_k$  z wierzchołkiem  $v$ ” spełnia

$$s(P) = \begin{cases} 2n - k & \text{dla } 3 \leq k \leq n, \text{ jeśli } k \text{ jest nieparzyste} \\ 2n - k - 1 & \text{dla } 6 \leq k < n, \text{ jeśli } k \text{ jest parzyste} \\ n & \text{dla } k \in \{4, n\} \end{cases}.$$

<sup>3</sup> Uogólnienie podane przez autora w pracy [Najman 2005].

*Twierdzenie 8.* Własność  $P$ : „ $G$  zawiera  $K_{2,k}$  ( $2 \leq k \leq n-2$ )” spełnia  $s(P) = n + k - 2$ .

*Twierdzenie 9.* Własność  $P$ : „ $G$  zawiera  $P_k$  ( $4 \leq k \leq n$ )” spełnia  $s(P) = n - 1$ .

*Dowód.* Niech graf  $G + uv$  zawiera ścieżkę  $u_1 u_2 \dots u_k$ , gdzie  $u_1 = u$ ,  $u_k = v$ . Załóżmy, że  $G$  nie zawiera żadnej ścieżki  $P_k$ . Niech  $H$  będzie podgrafem indukowanym w grafie  $G$  przez zbiór wierzchołków  $\{u_i; 1 \leq i \leq k\}$ . Wtedy graf  $(H * K_1) + uv$  jest hamiltonowski, ale  $H * K_1$  taki nie jest. Korzystając z twierdzenia 5 dla grafu  $H * K_1$ , mamy

$$(d_H(u) + 1) + (d_H(v) + 1) < k + 1.$$

Z drugiej strony wierzchołki  $u$  oraz  $v$  nie mają wspólnego sąsiada na zewnątrz  $H$  (w przeciwnym razie  $G$  zawierałaby  $P_{k+1}$ ), czyli

$$d_G(u) + d_G(v) \leq n - k + d_H(u) + d_H(v) < n - 1.$$

Rozważmy graf  $K_{1,n-3} \cup K_2$ , oznaczając przez  $v_1, v_2, \dots, v_{n-3}$  wierzchołki stopnia pierwszego, przez  $u$  wierzchołek stopnia  $n-3$  w grafie  $K_{1,n-3}$ , a przez  $v$  oraz  $w$  wierzchołki grafu  $K_2$ . Dodajemy  $k-4$  krawędzi  $v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{k-4} v_{k-3}$ . Otrzymany przykład grafu<sup>4</sup> pokazuje, że wartość  $n-1$  jest najmniejsza z możliwych.

*Twierdzenie 10.* Własność  $P$ : „ $G$  zawiera  $kK_2$  ( $2k \leq n$ )” spełnia  $s(P) = 2k - 1$ .

*Definicja 6.*  $k$ -faktorem grafu  $G$  nazywamy  $k$ -regularny częściowy podgraf grafu  $G$ . 1-faktorem grafu  $G$  nazywamy skojarzenie pokrywające wszystkie wierzchołki grafu  $G$ .

Zauważmy, że graf  $G$  nieparzystego rzędu nie może posiadać  $k$ -faktora, gdy  $k$  jest liczbą nieparzystą, zatem rozważamy tylko przypadek, gdy  $kn$  jest liczbą parzystą.

*Twierdzenie 11.* Własność  $P$ : „ $G$  posiada  $k$ -faktor ( $kn$  jest liczbą parzystą i  $9 \leq 3k + 3 \leq n$ )” spełnia  $s(P) = n + 2k - 4$ .

*Definicja 7.* Graf  $G$  nazywamy  $k$ -wierzchołkowo spójnym ( $k$ -krawędziowo spójnym), jeśli po usunięciu mniej niż  $k$  wierzchołków (mniej niż  $k$  krawędzi) otrzymany graf jest grafem spójnym.

*Twierdzenie 12.* Własność  $P$ : „ $G$  jest  $k$ -wierzchołkowo spójny ( $k$ -krawędziowo spójny) ( $k \leq n \leq 2$ )” spełnia  $s(P) = n + k - 2$ .

*Definicja 8.* Przez  $\alpha(G)$  oznaczamy największą liczbę zbioru niezależnych wierzchołków w grafie  $G$  (żadne dwa wierzchołki tego zbioru nie są połączone).

<sup>4</sup> Przykład podany przez autora w pracy [Najman 2005].



*Twierdzenie 13.* Własność  $P$ : „ $\alpha(G) \leq k$  ( $k \leq n$ )” spełnia  $s(P) = 2n - 2k - 1$ .

*Definicja 9.* Graf  $G$  nazywamy  $k$ -hamiltonowskim, jeśli po usunięciu co najwyżej  $k$  wierzchołków z grafu  $G$  otrzymany graf jest grafem hamiltonowskim.

*Twierdzenie 14.* Własność  $P$ : „ $G$  jest  $k$ -hamiltonowski ( $k \leq n - 3$ )” spełnia  $s(P) = n + k$ .

*Definicja 10.* Graf  $G$  nazywamy  $k$ -krawędziowo hamiltonowskim, jeśli dla dowolnego zbioru  $k$  krawędzi  $F$ , które tworzą parami rozłączne ścieżki w grafie  $G$ , graf  $G$  posiada cykl Hamiltona zawierający wszystkie krawędzie ze zbioru  $F$ .

*Twierdzenie 15.* Własność  $P$ : „ $G$  jest  $k$ -krawędziowo hamiltonowski ( $k \leq n - 3$ )” spełnia  $s(P) = n + k$ .

*Definicja 11.* Graf  $G$  nazywamy hamiltonowsko spójnym, jeśli dowolne dwa wierzchołki w  $G$  są połączone ścieżką Hamiltona.

*Definicja 12.* Graf  $G$  nazywamy  $k$ -hamiltonowsko spójnym, jeśli po usunięciu co najwyżej  $k$  wierzchołków z  $G$  otrzymany graf jest hamiltonowsko spójny.

*Twierdzenie 16.* Własność  $P$ : „ $G$  jest  $k$ -hamiltonowsko spójny ( $k \leq n - 4$ )” spełnia  $s(P) = n + k + 1$ .

*Definicja 13.* Graf  $G$  nazywamy trasowalnym, jeśli zawiera ścieżkę Hamiltona.

Korzystając z twierdzenia 9, gdy  $k = n$ , otrzymujemy:

*Twierdzenie 17.* Własność  $P$ : „ $G$  jest trasowalny ( $n \geq 4$ )” spełnia  $s(P) = n - 1$ . ■

Przez  $\mu(G)$  oznaczamy najmniejszą liczbę parami rozłącznych ścieżek pokrywających wszystkie wierzchołki grafu  $G$ .

*Twierdzenie 18.* Własność  $P$ : „ $\mu(G) \leq k$  ( $k \leq n - 1$ )” spełnia  $s(P) = n - k$ .

*Definicja 14.* Kliką w grafie  $G$  nazywamy podgraf pełny grafu  $G$  (niekoniecznie maksymalny).

Stabilność własności zawierania klikę  $K_t$  nie była znana aż do 2000 r., gdy H.J. Broersma, Z. Ryjáček i I. Schiermeyer [2000] podali przykład grafu, który pozwala określić stabilność tej własności.

*Twierdzenie 19.* Własność  $P$ : „ $G$  zawiera klikę  $K_t$ ” spełnia  $s(P) = 2n - 3$ .

## 4.2. Inne własności grafów zwykłych

*Definicja 15.* Obwodem grafu  $G$  nazywamy długość najdłuższego cyklu w grafie  $G$ .

Wielu matematyków zauważyło, że własność  $P$ : „ $G$  posiada obwód  $k$ ” spełnia  $s(P) = n$  dla  $k < n$ . W 1995 r. S. Brandt i H.J. Veldman [1997] pokazali to w następujący sposób.

*Twierdzenie 20.* Jeśli  $G$  jest grafem rzędu  $n$ , to obwód grafu  $G$  równa się obwodowi grafu  $cl_n(G)$ .

Na mocy definicji 4 oraz twierdzenia 20 otrzymujemy:

*Wniosek 1.* Własność  $P$ : „ $G$  posiada obwód  $k$  ( $k < n$ )” spełnia  $s(P) = n$ . ■

W 1990 r. G.R.T. Hendry [1990] wprowadził pojęcie cyklu rozszerzalnego oraz grafu zawierającego cykl rozszerzalny.

*Definicja 16.* Cykl  $C$  w grafie  $G$  nazywamy rozszerzalnym (w  $G$ ), jeśli istnieje cykl  $C'$  w  $G$  taki, że  $V(C) \subseteq V(C')$  i  $|V(C')| = |V(C)| + 1$ . Jeśli taki cykl  $C'$  istnieje, to mówimy, że cykl  $C$  może być rozszerzony do cyklu  $C'$  lub że cykl  $C'$  jest rozszerzeniem cyklu  $C$ .

*Definicja 17.* Graf  $G$  zawiera cykl rozszerzalny, jeśli zawiera co najmniej jeden cykl i każdy niehamiltonowski cykl jest rozszerzalny.

*Definicja 18.* Graf  $G$  ma własność  $S_k$  ( $3 \leq k \leq n - 1$ ), jeśli każdy niehamiltonowski cykl długości co najmniej  $k$  jest rozszerzalny.

G.R.T. Hendry [1990] wyznaczył stabilność zawierania cyklu rozszerzalnego w grafach w następujący sposób.

*Twierdzenie 21.* Własność  $S_k$  jest  $(2n - k - 1)$ -stabilna, ale nie jest  $(2n - k - 2)$ -stabilna.

Na mocy definicji 5, 17 i 18 oraz twierdzenia 21 otrzymujemy:

*Wniosek 2.* Własność  $P$ : „ $G$  zawiera cykl rozszerzalny” spełnia  $s(P) = 2n - 4$ . ■

Poniżej przedstawiona została następna rzadko spotykana własność.

*Definicja 19.* Graf  $G$  jest  $k$ -liściowo spójny, jeśli dla dowolnego zbioru  $S \subseteq V(G)$  oraz  $|S| = k < n$  graf  $G$  zawiera drzewo częściowe  $F$  takie, że zbiór  $S$  jest zbiorem wierzchołków wiszących (liści) drzewa  $F$ . Drzewo  $F$  nazywamy  $S$ -częściowym drzewem w  $G$ .

Zauważmy, że graf jest dwuliściowo spójny wtedy i tylko wtedy, gdy jest hamiltonowsko spójny. W 1986 r. M.A. Gurgel i Y. Wakabayashi [1986] wykazali, że własność „ $G$  jest  $k$ -liściowo spójny” jest  $(n + k - 1)$ -stabilna. Dopiero w 2000 r. H.J. Broersma, Z. Ryjáček i I. Schiermeyer [2000] podali przykład grafu, który pozwala ustalić stabilność tej własności.

*Twierdzenie 22.* Własność  $P$ : „ $G$  jest  $k$ -liściowo spójny” spełnia  $s(P) = n + k - 1$ .

Tabela 1. Zestawienie stabilności wybranych własności grafów zwykłych

Twierdzenie	Własność $P$	$s(P)$
5	„ $G$ jest hamiltonowski (zawiera cykl $C_n$ )”	$n$
6	„ $G$ zawiera cykl $C_k$ ( $3 \leq k \leq n$ , $k$ jest liczbą nieparzystą)”	$2n - k$
6	„ $G$ zawiera cykl $C_k$ ( $6 \leq k < n$ , $k$ jest liczbą parzystą)”	$2n - k - 1$
6	„ $G$ zawiera cykl $C_4$ ”	$n$
7	„ $G$ zawiera cykl $C_k$ z wierzchołkiem $v$ ( $3 \leq k \leq n$ , $k$ jest liczbą nieparzystą)”	$2n - k$
7	„ $G$ zawiera cykl $C_k$ z wierzchołkiem $v$ ( $6 \leq k < n$ , $k$ jest liczbą parzystą)”	$2n - k - 1$
7	„ $G$ zawiera cykl $C_4$ z wierzchołkiem $v$ ”	$n$
8	„ $G$ zawiera $K_{2,k}$ ( $2 \leq k \leq n - 2$ )”	$n + k - 2$
9	„ $G$ zawiera ścieżkę $P_k$ ( $4 \leq k \leq n$ )”	$n - 1$
10	„ $G$ zawiera $kK_2$ ( $2k \leq n$ )”	$2k - 1$
11	„ $G$ posiada $k$ -faktor ( $kn$ jest liczbą parzystą i $6 \leq 3k \leq n \leq 3$ )”	$n + 2k - 4$
12	„ $G$ jest $k$ -wierzchołkowo lub $k$ -krawędziowo spójny ( $k \leq n - 2$ )”	$n + k - 2$
13	„ $\alpha(G) \leq k$ ( $k \leq n$ )”	$2n - 2k - 1$
14	„ $G$ jest $k$ -hamiltonowski ( $k \leq n - 3$ )”	$n + k$
15	„ $G$ jest $k$ -krawędziowo hamiltonowski ( $k \leq n - 3$ )”	$n + k$
16	„ $G$ jest $k$ -hamiltonowsko spójny ( $k \leq n - 4$ )”	$n + k + 1$
17	„ $G$ jest trasowalny ( $4 \leq n$ )”	$n - 1$
18	„ $\mu(G) \leq k$ ( $k \leq n - 1$ )”	$n - k$
19	„ $G$ zawiera klikę $K_t$ ”	$2n - 3$
20	„ $G$ posiada obwód $k$ ( $k < n$ )”	$n$
21	„ $G$ zawiera cykl rozszerzalny”	$2n - 4$
22	„ $G$ jest $k$ -liściowo spójny”	$n + k - 1$

Źródło: opracowanie własne.

## 5. Wybrane zastosowania domknięcia i stabilności

W niniejszym punkcie artykułu podano przykłady prac, w których znalazły zastosowanie pojęcia domknięcia i stabilności oraz wyniki uzyskane w pracy J.A. Bondy'ego i V. Chvátala [1976].

W 1989 r. D. Bauer i in. [1989] zastosowali pojęcie domknięcia do udowodnienia warunku wystarczającego dla grafów hamiltonowskich.

W 1990 r. H.J. Veldman [1990] udowodnił twierdzenie, dzięki któremu można łatwo otrzymać kilka wyników typu Fana [Fan 1984]. Pokazał to na przykładzie kilku twierdzeń z A. Benhocine i A.P. Wojdą [1987], wykorzystując stabilność

następujących własności: „ $G$  jest  $k$ -hamiltonowski” i „ $G$  jest  $k$ -hamiltonowsko spójny” i „ $\mu(G) \leq k$ ”.

W 1991 r. w pracach A.S. Hasratiana i N.K. Khachatriana [1991] oraz Y.-J. Zhu, F. Tiana i X.-T. Denga [1991] zastosowano metody dowodów J.A. Bondy’ego i V. Chvátala.

W 1993 r. R. Faudree i in. [1993] wprowadzili pojęcie pełnego domknięcia grafu i pełnej stabilności własności grafów. Liczbą pełnego domknięcia (*complete closure number*)  $cc(G)$  grafu  $G$  rzędu  $n$  nazywamy największą liczbę całkowitą  $k \leq 2n - 3$  taką, że  $cl_k(G) = K_n$ . Dla przykładu  $cc(K_n) = 2n - 3$ ,  $cc(K_n - e) = 2n - 4$ ,  $cc(\overline{K}_n) = 0$  i  $cc(G) = 2r$ , gdy  $G$  jest grafem  $r$ -regularnym. Pełna stabilność (*complete stability*)  $cs(P)$  własności  $P$  zdefiniowanej dla wszystkich grafów rzędu  $n$  to najmniejsza liczba całkowita  $k$  taka, że jeśli dla dowolnego grafu  $cl_k(G) = K_n$ , to graf  $G$  ma własność  $P$ . Liczba ta zwykle zależy od  $n$  i spełnia nierówność  $cs(P) \leq s(P)$ , zatem wyniki uzyskane przez J.A. Bondy’ego i V. Chvátala ułatwiły ustalenie pełnej stabilności pewnych własności grafów.

W 2002 r. B. Randerath i in. [2002] wykorzystali pojęcie domknięcia do sformułowania warunków wystarczających dla różnych własności (np. dla pancykliczności, wierzchołkowej pancykliczności).

G.R.T. Hendry [1991] w 1991 r. wykorzystał pojęcie bidomknięcia oraz bistabilność własności „ $G$  jest hamiltonowski” grafów dwudzielnych zrównoważonych, aby udowodnić wyniki swoich badań dotyczących zawierania cykli rozszerzalnych w grafach dwudzielnych.

## Literatura

- Amar D. *et al.* [1995], *Biclosure and Stability in Balanced Bipartite Graph*, „Journal of Graph Theory”, vol. 20, nr 4.
- Bauer D. *et al.* [1989], *A Generalization of a Result of Häggkvist and Nicoghossian*, „Journal of Combinatorial Theory B”, vol. 47, nr 2.
- Benhocine A., Wojda A. P. [1987], *The Geng-Hua Fan Conditions for Pancyclic or Hamilton-connected Graphs*, „Journal of Combinatorial Theory B”, vol. 42, nr 2.
- Bondy J.A., Chvátal V. [1976], *A Method in Graph Theory*, „Discrete Mathematics”, vol. 15, nr 2.
- Bondy J.A., Murthy U.S.R. [1976], *Graph Theory with Applications*, American Elsevier, New York.
- Brandt S., Veldman H.J. [1997], *Degree Sums for Edges and Cycle Lengths in Graphs*, „Journal of Graph Theory”, vol. 25, nr 4.
- Broersma H.J., Ryjáček Z., Schiermeyer I. [2000], *Closure Concepts: A Survey*, „Graphs and Combinatorics”, vol. 16, nr 1.
- Clark L., Entringer R.C., Jackson D.E. [1980], *Minimum Graphs with Complete  $k$ -closure*, „Discrete Mathematics”, vol. 30, nr 2.

- Faudree R. *et al.* [1993], *The Complete Closure of a Graph*, „Journal of Graph Theory”, vol. 17, nr 4.
- Fan Geng-Hua [1984], *New Sufficient Conditions for Cycles in Graphs*, „Journal of Combinatorial Theory B”, vol. 37, nr 3.
- Gurgel M.A., Wakabayashi Y. [1986], *On  $k$ -leaf-connected Graphs*, „Journal of Combinatorial Theory B”, vol. 41, nr 1.
- Harary F. [1969], *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading.
- Hasratian A.S., Khachatryan N.K. [1991], *Stable Properties of Graphs*, „Discrete Mathematics”, vol. 90, nr 2.
- Hendry G.R.T. [1990], *Extending Cycles in Graphs*, „Discrete Mathematics”, vol. 85, nr 1.
- Hendry G.R.T. [1991], *Extending Cycles in Bipartite Graphs*, „Journal of Combinatorial Theory B”, vol. 51, nr 2.
- Khuller S. [1989], *On Computing Graph Closures*, „Information Processing Letters”, vol. 31, nr 5.
- Monti A. [1996], *On the Computational Complexity of Graph Closures*, „Information Processing Letters”, vol. 57, nr 6.
- Najman P. [2005], *Stabilność Bondy'ego-Chvátala*, praca magisterska, AGH, Wydział Matematyki Stosowanej, Kraków.
- Ore O. [1960], *Note on Hamilton Circuits*, „American Mathematical Monthly”, vol. 67, nr 1.
- Randerath B. *et al.* [2002], *Vertex Pancyclic Graphs*, „Discrete Applied Mathematics”, vol. 120, nr 1–3.
- Szwarcfiter J.L. [1987], *A Note on the Computation of the  $k$ -closure of a Graph*, „Information Processing Letters”, vol. 24, nr 4.
- Veldman H.J. [1990], *Short Proofs of Some Fan-type Results*, „Ars Combinatoria”, nr 29.
- Zhu Y.-J., Tian F., Deng X.-T. [1991], *More Powerful Closure Operations on Graphs*, „Discrete Mathematics”, vol. 87, nr 2.

### **Bondy-Chvátal's Closure and Stability for Simple Graphs – Ideas, Formalisation and Complement**

The paper looks at several results from research on the stability of different graph properties. Definitions of Bondy-Chvátal's closure and stability for simple graphs are first presented, followed by an overview of basic facts on the stability of selected simple graph properties, for which stability has been established exactly. Proofs for theorems concerning a new example are included. Papers in which closure operation or stability of graph properties have been applied are also presented.

**Keywords:** Bondy-Chvátal closure, Bondy-Chvátal's stability, graph property, simple graphs.



*Marcin Stanisław Niedużak*

Studia Doktoranckie Wydziału Zarządzania  
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

# Badanie występowania transakcji z wykorzystaniem informacji poufnych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie

## Streszczenie

Niniejsze opracowanie stanowi syntetyczne przybliżenie jednego z wielu efektów występujących na światowych rynkach finansowych, a mianowicie kwestii wykorzystywania informacji poufnych i ich wpływu na ceny instrumentów finansowych (ang. *insider trading*). W pracy podjęto próbę empirycznej weryfikacji nadużyć rynkowych w czasie rzeczywistym z zastosowaniem modeli klasy GARCH. Na podstawie oszacowanej zmienności stóp zwrotu trzech spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie wyselekcjonowano transakcje podejrzane o występowanie potencjalnych nadużyć rynkowych. Zgodnie z definicją otrzymane wyniki nie są dowodem zaistnienia sytuacji nielegalnych transakcji, lecz jedynie podejrzeniem ich wystąpienia, podlegającym w dalszej kolejności weryfikacji innymi metodami.

**Słowa kluczowe:** informacja poufna, transakcje z wykorzystaniem informacji poufnych, insider trading, model GARCH, warunkowa wariancja, analiza w czasie rzeczywistym.

## 1. Wprowadzenie

Informacja i sposób jej pozyskiwania mają zasadnicze znaczenie dla uczestników rynku kapitałowego. Szczególnie istotna staje się więc informacja poufna, niedostępna szerokiemu gronu inwestorów. W teorii finansów tematyka ta jest szeroko omawiana w kontekście pojęcia informacyjnej efektywności rynku, w której nawiązuje się do definicji E.F. Fama [1970]. Zgodnie z nią „ceny zawsze w pełni odzwierciedlają dostępną informację”. Przyjęcie takiej hipotezy prowadzi do konkluzji, że każda informacja ważna z punktu widzenia rynku powinna znaleźć natychmiastowe odzwierciedlenie w cenie. W rzeczywistości rynki kapitałowe nie są w stanie od razu zdyskontować wszystkich informacji, czego potwierdzeniem jest występowanie anomalii rynkowych, takich jak na przykład insider trading.

Ekonomiści, prawnicy, a nawet filozofowie wciąż prowadzą szerokie rozważania i dyskusje na temat wykorzystywania informacji poufnych na rynkach kapitałowych. Rozważano zarówno skutki wprowadzenia regulacji prawnych zakazujących takiej praktyki, jak i skutki niepodejmowania żadnych kroków przeciw temu zjawisku. Badano skutki transakcji inwestorów posiadających poufne informacje dla nich samych (np. [Kerr 1980]) i dla pozostałych uczestników rynku (m.in. [Seyhun 1986]). Szeroko omawiany jest także problem aktywności inwestorów lepiej poinformowanych w zakresie zdarzeń takich, jak ogłoszenia prognoz zysków firmy, ogłoszenie wysokości wypłacanej dywidendy lub jej zmiana, upadłość spółki, split akcji, zmiana ratingu i inne (zob. np. [Ma, Sun i Yur-Austin 2000]). Choć skutki transakcji z wykorzystaniem poufnych informacji są szeroko omawiane w literaturze przedmiotu, naukowcom nadal nie udało się jednoznacznie ustalić ich zyskowości ani wartości samej informacji o takich transakcjach.

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie sposobu badania wpływu transakcji zawieranych przez inwestorów mających dostęp do poufnych informacji na ceny akcji, a także omówienie i interpretacja otrzymanych wyników. W badaniu empirycznym wykorzystano informacje o cenach akcji spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. W dotychczasowej literaturze przedmiotu odnoszącej się do nadużyć rynkowych stosunkowo niewiele miejsca poświęcano badaniom w czasie rzeczywistym, skupiając się przede wszystkim na statystycznym potwierdzeniu wystąpienia tej anomalii, a nie na problemie samego wykrywania tego zjawiska. Przez tego typu badanie należy rozumieć możliwość zastosowania modelu nie tylko do danych historycznych, ale również do bieżących notowań rynkowych. Podejście to daje możliwość analizowania aktualnego stopnia zaangażowania inwestorów lepiej poinformowanych w transakcje giełdowe. Należy zwrócić uwagę na pracę R. Cholewińskiego [2009], w której opisany został model dopuszczający możliwość wykrywania nadużyć rynkowych właśnie w czasie rzeczywistym.



## 2. Insider oraz insider trading – znaczenie pojęć

Niemal na całym świecie na rynkach kapitałowych zostały wprowadzone różnego rodzaju regulacje prawne, które mają na celu ochronę obrotu papierami wartościowymi przed wpływem niewłaściwego użycia poufnych informacji. Podstawową regulacją Unii Europejskiej jest tak zwana dyrektywa „Market Abuse”<sup>1</sup>, a w Polsce ustawa o obrocie instrumentami finansowymi<sup>2</sup> i inne<sup>3</sup>. Regulacje te wyznaczają krąg podmiotów mających bezwzględny zakaz umyślnego wykorzystywania informacji poufnych do zawierania transakcji na rachunek własny lub cudzy – są to członkowie władz administracyjnych, członkowie zarządu, rady nadzorczej i inne osoby mające dostęp do poufnych informacji (ang. *insiders*).

Insider trading w literaturze jest określany jako wykorzystywanie informacji poufnych, niedostępnych dla innych uczestników rynku w celu zawarcia korzystnych transakcji bądź niezgłoszenie transakcji odpowiedniemu organowi. Na wszystkich rozwiniętych rynkach finansowych nadużycie to jest zakazane, ponieważ godzi w prawo wszystkich uczestników rynku do równego i powszechnego dostępu do informacji. Można się spotkać z dwojakim podejściem do znaczenia insider tradingu. Z jednej strony, w wyniku działalności tej grupy inwestorów na rynek dużo szybciej docierają nowe poufne informacje. Wówczas ceny papierów wartościowych szybciej dostosowują się do aktualnej sytuacji notowanych firm. Z drugiej strony jednak, w zdecydowanej większości wypadków występowanie nadużyć obniża zaufanie inwestorów do rynku oraz wprowadza nierównowagę pomiędzy inwestorami.

## 3. Badania empiryczne dotyczące transakcji z wykorzystaniem informacji poufnych

Insider trading jest nielegalny w wielu rozwijających się państwach. Badania empiryczne poświęcone temu zagadnieniu można generalnie podzielić na dwie grupy. Do pierwszej zaliczają się badania związane z działalnością inwestorów lepiej poinformowanych, a więc między innymi opisujące zyskowość ich transakcji lub wpływ na innych inwestorów. Drugą grupę badań stanowią prace na temat aktywności insiderów na rynku dotyczącej innych istotnych zdarzeń: ogłoszeń prognoz

---

<sup>1</sup> Więcej: Dyrektywa 2003/6/WE Parlamentu Europejskiego i Rady z dnia 28 stycznia 2003 r. (Dz.Urz. UE L 96, s. 16), Dyrektywa Komisji 2004/72/WE z dnia 29 kwietnia 2004 r. (Dz.Urz. UE L 162, s. 70).

<sup>2</sup> Ustawa z dnia 29 lipca 2005 r. o obrocie instrumentami finansowymi (Dz.U. nr 183, poz. 1538).

<sup>3</sup> Ustawa z dnia 29 lipca 2005 r. o nadzorze nad rynkiem kapitałowym (Dz.U. nr 183, poz. 1537), Ustawa z dnia 21 lipca 2006 r. o nadzorze nad rynkiem finansowym (Dz.U. nr 157, poz. 1119).

zysków, ogłoszeń wysokości wypłacanej dywidendy lub zmiany jej wysokości, upadłości spółki czy splitu akcji.

Jednym z najistotniejszych problemów, z jakimi musi się zetknąć badacz, jest kwestia rozdzielenia wpływu transakcji inwestora lepiej poinformowanego na cenę waloru i wpływu ukazania się jakiejś ważnej informacji na tę cenę. Kiedy takie ogłoszenie ma wpływ na wycenę notowanej firmy, uczestnik rynku mający świadomość wartości nowej informacji dokonuje transakcji. W konsekwencji po pewnym czasie wartość notowanych akcji zaczyna odzwierciedlać także i informacje poufne. Niestety przy tak ogromnej ilości napływających w jednym momencie na rynek informacji rozróżnienie wpływu ogłoszeń i wpływu transakcji inwestora lepiej poinformowanego na cenę jest praktycznie niemożliwe.

Dowody empiryczne dostarczone przez J. Jaffe [1974], H.N. Seyhuna [1986, 1988], J. Madurę i K.J. Wianta [1995] pokazują, że działania insiderów wywierają znaczny wpływ na ceny rynkowe akcji. H.N. Seyhun [1988] w swojej pracy oszacował koszt tego typu transakcji ponoszony przez pozostałych uczestników rynku. Wykazał, że oczekiwane zyski inwestorów wykorzystujących poufne informacje są tym mniejsze, im większa jest spółka [Gurgul 2006, s. 82–85].

A. Zingg, S. Lang i D. Wyttenbach [2007] przedstawili badanie, w którym próbowali rozstrzygnąć, jaka jest zależność aktywności inwestorów lepiej poinformowanych od wielkości przedsiębiorstwa. Autorzy ci wykazali, że w przypadku małych przedsiębiorstw aktywność ta jest największa i najbardziej znacząca. Natomiast nie udało się rozstrzygnąć, czy istotnie większy wpływ na rynek mają transakcje o większej wartości, czy też silniej na cenę oddziałuje większa liczba mniejszych zintegrowanych transakcji w tym samym okresie.

M. Firth, T.Y. Leung i O.M. Rui [2009] w swoim artykule podjęli próbę odpowiedzi na pytanie, czy na rynku w Hongkongu, podobnie jak na rynku amerykańskim i brytyjskim, informacja o sprzedaży akcji przez inwestora lepiej poinformowanego jest dla rynku istotniejsza niż informacja o kupnie akcji. Autorzy wykazali, że ta grupa inwestorów dokonuje zakupu, gdy ceny akcji spadają, a sprzedaży, gdy ceny rosną. Ponadto pokazali, że transakcje kupna przynoszą tym inwestorom mniejsze korzyści niż transakcje sprzedaży.

M.A. Biesta, R.Q. Doeswijk i H.A. Doker [2003] wykazali, że insiderzy są w stanie generować z wykorzystaniem poufnych informacji większe od innych inwestorów zyski. Pokazali również, że naśladując działania inwestorów większych instytucji, również możemy spodziewać się ponadprzeciętnych zysków.

W literaturze znaleźć można także pozycje prezentujące badania empiryczne przeprowadzane na danych pochodzących z Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. T.P. Wiśniewski [2004] podjął próbę odpowiedzi na większość opisanych wcześniej kwestii, wykorzystując dane z polskiego rynku. Pokazał, że zyskowość transakcji z wykorzystaniem poufnych informacji była statystycznie

wyższa niż przeciętnego inwestora. Ponadto jeśli inwestor lepiej poinformowany dokonał kupna (sprzedaży) papierów wartościowych, wkrótce ceny rosły (spadały).

Temat zyskowności strategii naśladownictwa na polskim rynku poruszył również H. Gurgul [2006, s. 91–94]. Na podstawie porównania specjalnie utworzonego portfela testowego z portfelem referencyjnym wykazał, że inwestorzy naśladowujący jedynie transakcje kupna insiderów ponieśliby stratę. Z drugiej strony, ci inwestorzy, którzy sprzedawaliby swoje akcje zaraz po tym, jak sprzedaży dokonał inwestor lepiej poinformowany, osiągnęliby zysk większy od przeciętnego. H. Gurgul zauważył również, że inwestorzy ci byli skłonni kupować akcje tuż przed rozpoczynającą się hossą oraz że dokonywali transakcji kupna nawet wtedy, gdy ceny akcji znacznie spadały. Wykazał, że informacja o transakcji dokonanej z wykorzystaniem informacji poufnych ma wpływ nie tylko na cenę papierów wartościowych, ale i na wielkość obrotów.

Zdecydowana większość badań empirycznych na temat tego rodzaju transakcji oparta jest na danych dziennych. Dane śróddzienne (ang. *intraday*), rozważane jedynie w znikomej liczbie prac, są bardziej narażone na różnego rodzaju wahania – według autora badania wpływu insiderów na rynek powinny opierać się właśnie na nich. Gdy inwestor lepiej poinformowany dokonywał transakcji, rynek był w stanie zareagować i zdyskontować nową informację w cenie waloru. Wątpliwe jest to, że w tym dniu nie wystąpiła inna równie ważna dla inwestorów informacja, która także miała wpływ na wycenę akcji spółki. Dlatego też dane *intraday* lepiej oddają naturę postawionego problemu. Badanie empiryczne, które podejmuje tę kwestię, zawiera praca R. Cholewińskiego [2009], który zaproponował model ekonometryczny szacujący występowanie nadużyć rynkowych w czasie rzeczywistym. Podejście to ma wiele wspólnego z klasyczną analizą zdarzeń, ale różni się od niej w bardzo istotnej kwestii. Metodologia analizy zdarzeń bazuje na danych *ex post*, badacz ma już dość precyzyjną wiedzę na temat treści i samego momentu zdarzenia. Jego zadaniem jest więc podać statystyczny dowód wpływu wykrytego zdarzenia. Natomiast model R. Cholewińskiego może bez przeszkód być wykorzystywany właśnie do wykrywania nadużyć rynkowych w dowolnym okresie notowań.

#### **4. Struktura ekonometryczna modelu**

W artykule R. Cholewińskiego do badań wykorzystano model zaproponowany przez N. Monteiro, Q. Zamana i S. Leitterstorfa [2007] będący odmianą modelu równowagi rynku kapitałowego CAMP, który dopuszcza również autokorelacje i warunkową heteroskedastyczność stóp zwrotu. Równanie modelu przedstawia się następująco:

$$R_t = \alpha + \beta R_{m,t} + \rho R_{t-1} + \gamma R_{m,t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim D(0, \sigma_t^2) \quad (1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \omega_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \omega_2 \sigma_{t-1}^2, \quad (2)$$

gdzie:

$R_t$  oznacza stopę zwrotu ceny danej akcji w dwóch następujących po sobie ustalonych okresach  $t$  i  $t - 1$ ;

$R_{m,t}$  oznacza stopę zwrotu z portfela rynkowego w tym samym czasie;

$\sigma_t^2$  określa warunkową wariancję stopy zwrotu  $R_t$ , zadaną przez proces GARCH(1, 1).

Różnicę pomiędzy aktualną, zaobserwowaną stopą zwrotu  $R_t$  a jej teoretyczną wartością, tj.  $\hat{\alpha} + \hat{\beta}R_{m,t} + \hat{\rho}R_{t-1} + \hat{\gamma}R_{m,t-1}$ , zdefiniujemy jako ponadprzeciętną stopę zwrotu (ang. *abnormal return*).

M. Minenna [2003] zaproponował sposób badania nadużyć rynkowych w czasie rzeczywistym, oparty na prognozowanych przedziałach stóp zwrotu. Jeśli  $R_t$  oznacza stopę zwrotu danego papieru wartościowego, informacja o możliwych nadużyciach rynkowych będzie generowana, gdy  $R_t$  znajdzie się poza przedziałem:

$$[\hat{R}_{t|t-1} - z_{\alpha/2} \hat{\sigma}_{\hat{R}_{t|t-1}}, \hat{R}_{t|t-1} + z_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_{\hat{R}_{t|t-1}}], \quad (3)$$

gdzie:

$\hat{R}_{t|t-1}$  jest wartością oczekiwaną stopy zmian w chwili  $t$  względem informacji posiadanych do chwili  $t - 1$  włącznie;

$\hat{\sigma}_{\hat{R}_{t|t-1}}$  oznacza pierwiastek warunkowej wariancji procesu w chwili  $t$ , wyznaczonej warunkowo względem informacji posiadanych do chwili  $t - 1$  włącznie;

$z_{\alpha/2}$  i  $z_{1-\alpha/2}$  oznaczają kwantyle rozkładu składnika losowego odpowiednio o rzędach  $\alpha/2$  oraz  $1 - \alpha/2$ .

W badaniu opartym na prognozowanych przedziałach różnica pomiędzy aktualną stopą zwrotu a jej aproksymatą staje się znana w chwili zaobserwowania aktualnego notowania. W badaniach empirycznych różnica ta wliczana jest w długość przedziału, który zależy od częstotliwości rozważanych notowań cen papierów wartościowych. Modele o wąskich przedziałach stosowane są więc do badań czasu rzeczywistego. Zauważyć należy również, że maksymalne opóźnienie pomiędzy zaistnieniem potencjalnego nadużycia rynkowego a jego wykryciem za pomocą modelu ekonometrycznego jest ograniczone przez wybór przedziału czasowego zawierającego kolejne notowania.

Użycie danych *intraday* nie powinno implikować jednakowego obciążenia wszystkich punktów notowań. Nieciągłość transakcji wymaga odseparowania od siebie ceny zamknięcia i ceny otwarcia akcji oraz nieco innego podejścia do tych wielkości. Cena otwarcia odzwierciedla wszystkie zlecenia przyjęte jeszcze przed rozpoczęciem sesji giełdowej. Cena zamknięcia jest determinowana podczas

fixingu zamknięcia. Model uwzględniający różnice dla tych dwóch odmiennych sytuacji uzyskano z równań (1) i (2) następująco:

$$R_{0,t} = \alpha_0 + \beta_0 R_{0,m,t} + \rho_0 R_{1,t-1} + \gamma_0 R_{1,m,t-1} + \varepsilon_{0,t}, \quad (4)$$

$$R_{1,t} = \alpha_1 + \beta_1 R_{1,m,t} + \rho_1 R_{0,t} + \gamma_1 R_{0,m,t} + \varepsilon_{1,t}, \quad (5)$$

$$\varepsilon_t = [\varepsilon_{0,t}, \varepsilon_{1,t}]' \sim D(0, H_t), \quad (6)$$

gdzie:

$R_{0,t}$ ,  $R_{0,m,t}$  oznacza stopę zwrotu pomiędzy ceną otwarcia w dniu  $t$  i ceną zamknięcia z poprzedniej sesji odpowiednio akcji oraz portfela rynkowego;

$R_{1,t}$ ,  $R_{1,m,t}$  oznacza stopę zwrotu pomiędzy ceną zamknięcia i ceną otwarcia w danym dniu;

$H_t$  oznacza macierz wariancji-kowariancji  $\varepsilon_t$ , którą opisano wielowymiarowym procesem GARCH.

Parametry oryginalnego modelu N. Monteiro, Q. Zamana i S. Leitterstorfa [2007] były oszacowane przy dwóch znaczących założeniach. Po pierwsze, przyjęto warunkowy rozkład normalny w procesie GARCH, co jest często odrzucane, zwłaszcza dla danych o dużej częstotliwości. Po drugie, zakłada się, że parametry modelu są stałe w czasie. Natomiast badania rynkowe (np. [Emerson, Hall i Zalewska-Mitura 1987, Zalewska-Mitura i Hall 1999, Rockinger i Urga 2000, Worthington i Higgs 2003]) pokazują, że warunek ten najczęściej nie jest spełniony. Modele nieuwzględniające dostosowania się rynku mogą błędnie wskazywać ponadprzeciętne stopy zwrotu. Jedno z rozwiązań tego problemu polega na potraktowaniu parametrów modelu jako zmiennych losowych, których dynamikę opisuje proces stochastyczny. A. Zalewska i S.G. Hall [1999] oraz M. Rockinger i G. Urga [2000] proponują, aby przyjąć proces błędzenia losowego w celu modelowania zmienności parametrów modelu:

$$\xi_t = \xi_{t-1} + v_t, \quad v_t \sim D(0, \sigma_\xi^2), \quad (7)$$

gdzie:

$\xi_t$  jest dowolnym parametrem strukturalnym przedstawionego modelu;

$v_t$  oznacza innowację w procesie, z zerową średnią i wariancją równą  $\sigma_\xi^2$ ;

$D$  jest pewnym rozkładem, zwykle zadany jako rozkład normalny.

Gdy  $\sigma_\xi^2 \rightarrow 0$ , to parametr  $\xi_t$  w (7) staje się stały dla każdego  $t, t + 1, \dots, T$ . Należy wspomnieć, że parametry w równaniu modelu GARCH pozostają niezmiennie. Wówczas ostatecznie model opisany w artykule R. Cholewińskiego [2009] przedstawia się następująco:

1) dla danych *intraday*:

$$\begin{aligned} R_t &= \alpha_t + \beta_t R_{m,t} + \rho_t R_{t-1} + \gamma_t R_{m,t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim D(0, \sigma_t^2) \\ \xi_t &= \xi_{t-1} + \nu_t, \quad \nu_t \sim D(0, \sigma_\xi^2), \quad \xi_t \in \{\alpha, \beta, \rho, \gamma\} \\ \sigma_t^2 &= \omega_0 + \omega_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \omega_2 \sigma_{t-1}^2, \end{aligned}$$

2) dla danych z otwarcia i zamknięcia sesji notowań:

$$\begin{aligned} R_{0,t} &= \alpha_0 + \beta_0 R_{0,m,t} + \rho_0 R_{1,t-1} + \gamma_0 R_{1,m,t-1} + \varepsilon_{0,t}, \\ R_{1,t} &= \alpha_1 + \beta_1 R_{1,m,t} + \rho_1 R_{0,t} + \gamma_1 R_{0,m,t} + \varepsilon_{1,t}, \\ \xi_t &= \xi_{t-1} + \nu_t, \quad \nu_t \sim D(0, \sigma_\xi^2), \quad \xi_t \in \{\alpha_0, \beta_0, \rho_0, \gamma_0, \alpha_1, \beta_1, \rho_1, \gamma_1\}, \\ \varepsilon_t &= [\varepsilon_{0,t}, \varepsilon_{1,t}]' \sim D(0, H_t). \end{aligned}$$

Błąd średniokwadratowy MSE dla prognozy  $R_t, R_{0,t}, R_{1,t}$  na pierwszy okres wykorzystywany jest do standaryzacji reszt oraz do budowy przedziału predykcyjnego. Podobnie błąd średniokwadratowy MSE dla  $\rho_t, \rho_{0,t}, \rho_{1,t}$  umożliwia przeprowadzenie testu *t*-Studenta w badaniu istotności autokorelacji stóp zwrotu papierów wartościowych [Cholewiński 2009, s. 263–267].

W niniejszym artykule wykorzystano model określony równaniami (1), (2), (4) i (5), odchodząc jednak od zmienności parametrów modelu określonego równaniem (7), kosztem rozważenia dwóch alternatywnych warunkowych rozkładów składnika losowego, to jest rozkładu normalnego i rozkładu *t*-Studenta. W przypadku szacowania parametrów równania (6) postąpiono zgodnie z propozycją R. Cholewińskiego, a więc do szacowania macierzy  $H_t$  przyjęto model stałych warunkowych współczynników korelacji – model CCC (ang. *constant conditional correlation*), zaproponowany przez T. Bollersleva [1990]. Macierz wariancji-kowariancji  $H_t$  wygląda wówczas następująco:

$$H_t = \begin{bmatrix} \sigma_{0,t}^2 & \delta \cdot \sigma_{0,t} \cdot \sigma_{1,t} \\ \delta \cdot \sigma_{0,t} \cdot \sigma_{1,t} & \sigma_{1,t}^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

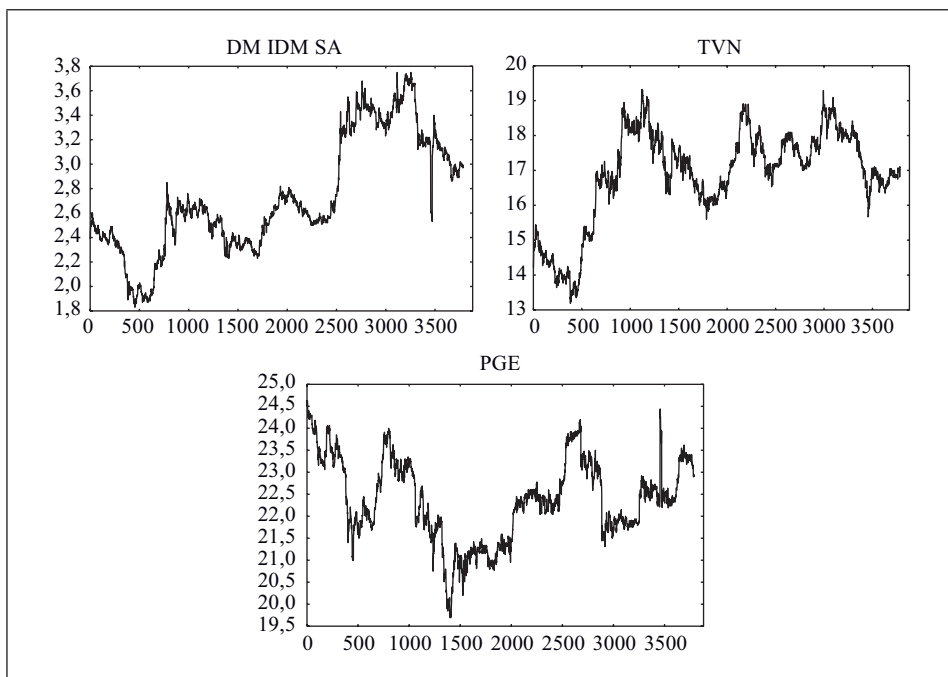
$$\begin{bmatrix} \sigma_{0,t}^2 \\ \sigma_{1,t}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \varepsilon_{0,t}^2 \\ \varepsilon_{1,t}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \sigma_{0,t-1}^2 \\ \sigma_{1,t-1}^2 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

gdzie  $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$  to wektory wymiaru  $2 \times 1$ ,  $\circ$  oznacza standardowe mnożenie macierzy. Macierz  $H_t$  jest dodatnio określona dla każdego  $\delta \in [-1, 1]$ , jeśli tylko  $\sigma_{0,t}^2 \neq \sigma_{1,t}^2$  dla każdego  $t$ . Aby zapewnić stacjonarność macierzy wariancji-kowariancji, wystarczy sprawdzić, czy  $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \leq 1$ . Parametr  $\delta$  jest współczynnikiem warunkowej korelacji i zgodnie z modelem CCC narzuca jej stałość w czasie, która w rzeczywistości niestety bardzo często nie jest spełniona. Stacjonarność

i dodatnią określoność macierzy  $H_t$  można otrzymać, stosując model BEKK opisany przez Y. Babę, R.F. Engle'a, D.F. Krafra i K.F. Kronera [Baba *et al.* 1991], ale dla ograniczenia liczby szacowanych parametrów przyjęto model CCC.

## 5. Wyniki przeprowadzonego badania empirycznego

Zaprezentowany model został oszacowany dla trzech spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie: Domu Maklerskiego IDM SA, TVN SA oraz PGE Polskiej Grupy Energetycznej SA. Do określenia stóp zwrotu portfela rynkowego wykorzystano notowania Warszawskiego Indeksu Giełdowego – WIG. Na rys. 1 zaprezentowane zostały wykresy przebiegu zmienności notowań cen akcji rozważanych spółek.



Rys. 1. Przebieg zmian cen akcji DM IDM SA, TVN i PGE w okresie od 4 stycznia 2010 r. do 31 grudnia 2010 r.

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych <http://bossa.pl>, dostęp: 3.09.2011.

W badaniu wykorzystano półgodzinne dane *intraday* w okresie od 4 stycznia 2010 r. do 31 grudnia 2010 r. Częstotliwość danych śróddziennych została dobrana

Tabela 1. Rezultaty estymacji dla danych śróddziennych

Parametr	Rozkład składnika losowego					
	DM IDM SA		TVN		PGE	
	normalny	<i>t</i> -Studenta	normalny	<i>t</i> -Studenta	normalny	<i>t</i> -Studenta
$\alpha$	0,00036412 (0,00034222) [1,063] {0,2873}	-0,0001827 (0,00007572) [-2,413] {0,0158}	0,00003027 (0,00008738) [0,3464] {0,729}	0,00005049 (0,00004882) [-1,034] {0,3009}	0,00001 (0,00005962) [0,1688] {0,8659}	0,00000716 (0,00003539) [-0,2024] {0,8396}
$\beta$	0,00212689 (0,00158825) [1,339] {0,1805}	1,13647 (0,0655999) [17,32] {0}	0,00227958 (0,00082282) [2,77] {0,0056}	0,00190019 (0,00118484) [1,604] {0,1088}	0,001198 (0,00073138) [1,638] {0,1014}	0,00116698 (0,00058112) [2,008] {0,0446}
$\rho$	-0,103079 (0,0763528) [-1,350] {0,1770}	-0,157445 (0,0165045) [-9,54] {0}	-0,149426 (0,0213674) [-6,993] {0}	-0,14127 (0,0160096) [-8,824] {0}	-0,12316 (0,0226121) [-5,447] {0,00000005}	-0,129899 (0,0155503) [-8,353] {0}
$\gamma$	0,00374873 (0,00135375) [2,769] {0,0056}	0,31121 (0,042646) [7,298] {0}	0,000243553 (0,00091742) [0,2655] {0,7906}	0,000726221 (0,00458351) [0,1584] {0,8741}	0,00030008 (0,00106209) [0,2825] {0,7775}	-0,00007505 (0,00374241) [-0,02006] {0,984}
$\varpi_0$	0,00000524 (0,00000435) [1,205] {0,2283}	0,00004867 (0,00000796) [6,112] {0}	0,00001176 (0,0000024) [4,891] {0,000001}	0,00003027 (0,00001537) [1,969] {0,049}	0,00000109 (0,0000004) [2,692] {0,0071}	0,00000685 (0,00001878) [3,651] {0,0003}
$\varpi_1$	0,0993012 (0,150521) [0,6697] {0,5094}	0,331603 (0,0801107) [4,139] {0,0000348}	0,186676 (0,0477754) [3,907] {0,00000933}	1,77164 (1,0058) [1,761] {0,0782}	0,0285687 (0,0215079) [1,328] {0,1841}	0,659616 (0,190548) [3,462] {0,0005}
$\varpi_2$	0,881171 (0,106827) [8,249] {0,00000001}	0,00048913 (0,00022221) [2,201] {0,0277}	0,473853 (0,0761005) [6,227] {0}	0,35282 (0,0385571) [9,515] {0}	0,909262 (0,0337719) [26,92] {0}	0,479188 (0,0476723) [10,05] {0}
Liczba stopni swobody	-	2,69414 (0,18596) [14,50] {0}	-	2,18371 (0,1136) [19,22] {0}	-	2,37113 (0,120504) [19,68] {0}

Uwaga: błędy standardowe ukazane są w okrągłych nawiasach, statystyka *t* w nawiasach kwadratowych, a wartość *p* w nawiasach klamrowych.

Źródło: obliczenia własne z wykorzystaniem Gretl 1.9.7.

z myślą o minimalizacji długości przedziału czasowego przy możliwym wyeliminowaniu okresów, w których nie odnotowano żadnych transakcji. W trakcie każdej sesji odnotowano 15 obserwacji, czyli notowań od godziny 9 do godziny 16 (3690 w całej próbie). Zbiór notowań nie jest wolny od luk, dlatego w wykorzystanych



danych śróddziennych występowały również braki notowań dla części godzin. Do badania przyjęto wówczas najbliższą występującą w bazie cenę akcji. Kursy otwarcia i zamknięcia sesji notowań pochodzą z tego samego okresu co dane śróddzienne, w związku z tym cen otwarcia i cen zamknięcia jest 246.

Tabela 2. Rezultaty estymacji modeli opisujących ceny otwarcia sesji giełdowych

Parametr	Rozkład składnika losowego					
	DM IDM SA		TVN		PGE	
	normalny	<i>t</i> -Studenta	normalny	<i>t</i> -Studenta	normalny	<i>t</i> -Studenta
$\alpha_0$	0,00098434 (0,00063634) [1,547] {0,1219}	0,0004745 (0,0004503) [1,054] {0,2920}	0,00022725 (0,00053231) [0,4269] {0,6695}	0,0002713 (0,0005552) [0,4885] {0,6252}	-0,00088698 (0,00039173) [-2,264] {0,0236}	-0,00087379 (0,00032311) [-2,704] {0,0068}
$\beta_0$	1,55154 (0,0701797) [22,11] {0}	1,38354 (0,0941468) [14,70] {0}	1,07564 (0,138613) [7,76] {0}	1,11183 (0,14229) [7,814] {0}	0,73398 (0,0855515) [8,579] {0}	0,652243 (0,106041) [6,151] {0}
$\rho_0$	0,0017992 (0,0310101) [0,05802] {0,9537}	-0,0194976 (0,026526) [-0,7350] {0,4623}	-0,196529 (0,0364663) [-5,389] {0,00000007}	-0,194743 (0,0369749) [-5,267] {0,0000001}	-0,109432 (0,0530667) [-2,062] {0,0392}	-0,146956 (0,0389329) [-3,775] {0,0002}
$\gamma_0$	0,283435 (0,102755) [2,758] {0,0058}	0,0932714 (0,0564002) [1,654] {0,0982}	0,305047 (0,0827317) [3,687] {0,0002}	0,28363 (0,0836121) [3,392] {0,0007}	0,100569 (0,0902711) [1,114] {0,2652}	0,132975 (0,0526738) [2,525] {0,0116}
$a_1$	0,00004046 (0,00001059) [3,817] {0,0001}	0,00006742 (0,00002455) [2,746] {0,006}	0,00000149 (0,00000291) [0,5144] {0,607}	0,00000619 (0,0000158) [0,3909] {0,6958}	0,00003746 (0,00001713) [2,187] {0,0287}	0,00002256 (0,00001057) [2,134] {0,0329}
$b_1$	1,31145 (0,893832) [1,467] {0,1423}	0,126846 (0,108746) [1,166] {0,2434}	0,0406839 (0,0395798) [1,028] {0,304}	0,0435003 (0,102723) [0,4235] {0,672}	0,0989185 (0,154732) [0,6393] {0,5226}	0,188799 (0,155926) [1,211] {0,226}
$c_1$	-0,0110491 (0,0118928) [-0,9291] {0,3529}	0,0452779 (0,0885901) [0,5111] {0,6093}	0,937581 (0,0542347) [17,29] {0}	0,868528 (0,301915) [2,877] {0,004}	-0,00916938 (0,146551) [-0,06257] {0,9501}	0,275061 (0,263347) [1,044] {0,2963}
Liczba stopni swobody	-	3,14976 (0,837485) [3,761] {0,0002}	-	7,75481 (3,86719) [2,005] {0,0449}	-	3,21094 (0,801898) [4,004] {0,0000622}

Uwaga: błędy standardowe ukazane są w okrągłych nawiasach, statystyka *t* w nawiasach kwadratowych, a wartość *p* w nawiasach klamrowych.

Źródło: obliczenia własne z wykorzystaniem Gretl 1.9.7.

Tabela 3. Rezultaty estymacji modeli opisujących ceny zamknięcia sesji giełdowych

Parametr	Rozkład składnika losowego					
	DM IDM SA		TVN		PGE	
	normalny	<i>t</i> -Studenta	normalny	<i>t</i> -Studenta	normalny	<i>t</i> -Studenta
$\alpha_1$	-0,0014546 (0,00116413) [-1,25] {0,2115}	-0,00116729 (0,0010856) [-1,075] {0,2823}	-0,00087887 (0,00094619) [-0,9289] {0,353}	-0,00110024 (0,00101059) [-1,089] {0,2763}	0,0001987 (0,0006926) [0,2869] {0,7742}	0,00009907 (0,0006844) [0,1448] {0,8849}
$\beta_1$	1,30181 (0,125303) [10,39] {0}	1,24041 (0,126054) [9,84] {0}	1,15277 (0,135803) [8,489] {0}	1,14224 (0,139545) [8,185] {0}	0,787838 (0,0839569) [9,384] {0}	0,803704 (0,0898546) [8,944] {0}
$\rho_1$	-0,212941 (0,16191) [-1,315] {0,1884}	-0,358366 (0,251107) [-1,427] {0,1535}	-0,610695 (0,120968) [-5,048] {0,0000004}	-0,607951 (0,125701) [-4,836] {0,0000013}	-0,430794 (0,119036) [-3,619] {0,0003}	-0,440509 (0,127263) [-3,461] {0,0005}
$\gamma_1$	0,352756 (0,311646) [1,132] {0,2577}	0,519093 (0,408421) [1,271] {0,2037}	0,900068 (0,249232) [3,611] {0,0003}	0,91319 (0,264891) [3,447] {0,0006}	0,0841978 (0,144767) [0,5816] {0,5608}	0,115019 (0,154278) [0,7455] {0,456}
$a_1$	0,000077 (0,00002965) [2,597] {0,0094}	0,00006837 (0,00004772) [1,433] {0,152}	0,00000253 (0,00000326) [0,7763] {0,4376}	0,00000251 (0,00000368) [0,681] {0,4959}	0,00005693 (0,00002964) [1,921] {0,0547}	0,00005442 (0,00002825) [1,927] {0,054}
$b_1$	0,220287 (0,108999) [2,021] {0,0433}	0,204888 (0,150918) [1,358] {0,1746}	0,0258524 (0,0247537) [1,044] {0,2963}	0,0225198 (0,0258895) [0,8698] {0,3844}	0,105832 (0,118082) [0,8963] {0,3701}	0,137563 (0,136956) [1,004] {0,3152}
$c_1$	0,635629 (0,0898333) [7,076] {0}	0,671558 (0,193179) [3,476] {0,0005}	0,96054 (0,0313142) [30,67] {0}	0,963945 (0,0355347) [27,13] {0}	0,360029 (0,252632) [1,425] {0,1541}	0,357788 (0,242263) [1,477] {0,1397}
Liczba stopni swobody	-	4,76836 (1,45093) [3,286] {0,001}	-	17,3024 (15,6227) [1,108] {0,2681}	-	15,1489 (16,0144) [0,946] {0,3442}

Uwaga: błędy standardowe ukazane są w okrągłych nawiasach, statystyka *t* w nawiasach kwadratowych, a wartość *p* w nawiasach klamrowych.

Źródło: obliczenia własne z wykorzystaniem Gretl 1.9.7.

Zaprezentowane w tabeli 1 wyniki estymacji modelu dla danych śróddziennych pokazują, że tylko w modelu dla spółki TVN dla warunkowego rozkładu *t*-Studenta składnika losowego wyraz wolny był istotny statystycznie na poziomie 0,1. Całkowicie odmienną sytuację mamy w przypadku parametru  $\rho$ , który był istotny prawie

we wszystkich badanych przypadkach, i to już na poziomie 1%. Oznacza to, że próba wykazywała istotną autokorelację stóp zwrotu cen akcji rozważanych spółek w badanym okresie. Ponadto stopa zwrotu cen akcji spółek w czasie  $t - 1$  ujemnie wpływała na stopy zwrotu bezpośrednio po nich następujące. W przypadku wszystkich trzech spółek parametr wskazujący na zależność stopy zwrotu danej akcji od ogólnej sytuacji na rynku wyrażonej stopą zwrotu portfela rynkowego w tym samym czasie był dodatni. Ponadto w połowie rozważanych przypadków parametr ten był istotny na poziomie 5%.

Wartościową informację niosą wyniki szacowania liczby stopni swobody w modelach dla warunkowego rozkładu  $t$ -Studenta składnika losowego. Liczba stopni swobody w tych modelach istotnie różni się od zera, lecz jest bardzo niska i oscyluje w granicach 2–3. Tak niewielka liczba stopni swobody sugeruje, że rozkład składnika losowego znacznie odbiega od rozkładu normalnego w związku z częstszym występowaniem nietypowych skrajnych obserwacji.

Wyniki szacowania modeli cen otwarcia i cen zamknięcia sesji giełdowych wskazano w tabelach 2 i 3.

We wszystkich oszacowanych modelach na stopę zwrotu ceny otwarcia i ceny zamknięcia w chwili  $t$  istotny dodatni wpływ miała stopa zwrotu portfela rynkowego w tym samym czasie  $t$ . Zauważyć należy również fakt, że ujemne parametry  $\rho_i$  modeli dla spółek TVN i PGE były istotne na poziomie 0,05. Oznacza to istotny statystycznie ujemny wpływ stopy zwrotu zarówno ceny otwarcia, jak i ceny zamknięcia w czasie  $t - 1$  na stopę zwrotu ceny akcji danej spółki w czasie  $t$ . W równaniu warunkowej wariancji składnika losowego prawie w każdym przypadku wystąpił nieistotny współczynnik  $b_i$ , co oznacza, że na warunkową wariancję nie wpływała istotnie wartość kwadratu reszt dla  $t - 1$ . Analizując otrzymane wyniki, należy również zauważyć, że dodatnie były wszystkie parametry określające autokorelację warunkowej wariancji z wyjątkiem  $c_i$  cen akcji DM IDM SA i PGE dla rozkładu normalnego.

Liczby stopni swobody w modelach cen otwarcia były istotne na poziomie 0,05 i wyższe od 3. Natomiast w modelach cen zamknięcia jedynie dla DM IDM SA liczba stopni swobody istotnie różniła się od zera. Zaprezentowane wyniki sugerują, że dla prognozowania korzystne staje się odejście od modeli cechujących się warunkowym normalnym rozkładem składnika losowego. Warto więc rozważyć rozkłady o grubszych ogonach niż dla rozkładu normalnego, na przykład przyjmując rozkład  $t$ -Studenta.

Oszacowane modele zostały wykorzystane do tworzenia sygnałów określających potencjalne wystąpienie nadużyć rynkowych. Sygnały takie były generowane za każdym razem, gdy rzeczywista stopa zwrotu znalazła się poza przedziałem opisanym w (3) dla 5-proc. poziomu ufności. Sygnały te porównano również pod kątem tego, czy sygnał wykazany za pomocą oszacowanego modelu dla

normalnego rozkładu reszt został również wykazany dla modelu z rozkładem  $t$ -Studenta. Wyniki tego porównania zarówno dla danych śróddziennych, jak i dla cen otwarcia i zamknięcia zawarte zostały w tabelach 4 i 5.

Tabela 4. Sygnały generowane przez modele dla danych *intraday*

Wygenerowane sygnały	DM IDM SA	TVN	PGE
Rozkład normalny składnika losowego w modelu	109	226	159
Rozkład $t$ -Studenta składnika losowego w modelu	21	3	10
Wykryte równocześnie przez oba modele	19	3	10

Źródło: obliczenia własne z wykorzystaniem MS Excel.

Analizując otrzymane wyniki dla danych śróddziennych, zaobserwować można zdecydowanie mniejszą liczbę sygnałów określających potencjalne wystąpienie nadużycia generowanych w wypadku przyjęcia rozkładu  $t$ -Studenta jako warunkowego rozkładu składnika losowego. Różnica w liczbie sygnałów jest szczególnie duża w przypadku spółki TVN. Wyniki badania wykazują również, że prawie wszystkie sygnały wygenerowane z użyciem modelu z rozkładem  $t$ -Studenta jako warunkowym rozkładem składnika losowego zostały również zaobserwowane przez model z rozkładem normalnym. Oznacza to, że jeśli badalibyśmy, czy na rynku występowały transakcje z wykorzystaniem poufnych informacji, to szczególną uwagę należałoby zwrócić na sygnały identyfikowane przez model z rozkładem  $t$ -Studenta.

Tabela 5. Sygnały generowane przez modele dla estymacji cen otwarcia i cen zamknięcia

Sygnały wygenerowane przez modele dla cen otwarcia			
Sygnały	Modele		
	DM IDM SA	TVN	PGE
Rozkład normalny składnika losowego w modelu	57	47	34
Rozkład $t$ -Studenta składnika losowego w modelu	12	32	7
Wykryte równocześnie przez oba modele	12	32	7
Sygnały wygenerowane przez modele dla cen zamknięcia			
Sygnały	Modele		
	DM IDM SA	TVN	PGE
Rozkład normalny składnika losowego w modelu	30	45	47
Rozkład $t$ -Studenta składnika losowego w modelu	9	36	40
Wykryte równocześnie przez oba modele	9	36	40

Źródło: obliczenia własne z wykorzystaniem MS Excel.

Warte zaznaczenia jest to, że naprawdę niewielka jest liczba wykrytych sygnałów w porównaniu z ogólną liczbą wykorzystanych danych śróddziennych.

W przypadku danych dla cen otwarcia i zamknięcia liczba wygenerowanych sygnałów stanowi około 15% całej próby. Otrzymane wyniki estymacji dla notowań cen otwarcia i zamknięcia sesji giełdowych sugerują, że przyjęcie rozkładu *t*-Studenta w znaczny sposób zmniejsza liczbę wykrytych sygnałów. Zauważalna jest również nieco większa liczba sygnałów dla cen otwarcia niż dla cen zamknięcia. Należy również zwrócić uwagę, że w całej próbie każdy sygnał potencjalnego nadużycia wygenerowany z użyciem modelu z rozkładem *t*-Studenta został także wychwycony przez model z rozkładem normalnym. Nasuwa się więc tutaj podobny wniosek jak przy danych *intraday*, a mianowicie badanie obecności insidera na rynku należałoby zacząć od dokładniejszego przeanalizowania notowań, dla których sygnał wygenerowały równocześnie oba modele.

## 6. Podsumowanie

Celem niniejszego artykułu było przybliżenie pojęcia transakcji z wykorzystaniem informacji poufnych oraz sposobu badania wpływu tych transakcji na ceny akcji w czasie rzeczywistym. Wykorzystano model opisany przez R. Cholewińskiego [2009], z tą jednak różnicą, że przy założeniu stałości parametrów modelu w czasie rozważono dwa różne warunkowe rozkłady składnika losowego: rozkład normalny i rozkład *t*-Studenta. Wykorzystanie danych śróddziennych jest ważnym krokiem w kierunku poszerzenia badań z zakresu wykrywania nadużyć rynkowych w czasie rzeczywistym. Zaproponowany model klasy GARCH należy traktować jako wstępną, w dużym stopniu uproszczoną wersję modelu, którego szczegółowa specyfikacja winna podlegać dalszej weryfikacji. Kontynuacja prowadzonych badań będzie polegała przede wszystkim na wprowadzeniu zmienności parametrów w czasie, odzwierciedleniu śróddziennych wahań cyklicznych notowań oraz dalsze testowanie postaci warunkowego rozkładu składnika losowego.

W artykule podjęto próbę porównania wyników uzyskanych z zastosowaniem w modelach innego podejścia do warunkowego rozkładu składnika losowego. Wyniki jednoznacznie pokazują, że odejście od standardowych uproszczeń w estymowanych modelach, takich jak na przykład założenie normalnego warunkowego rozkładu składnika losowego, zdecydowanie ogranicza liczbę momentów, co do których podejrzewa się wystąpienie nadużyć rynkowych. Sygnały te mogą być niezwykle istotnymi informacjami dla instytucji finansowych zajmujących się wykrywaniem przestępstw finansowych. Zaznaczyć należy jednak, że sygnał taki nie jest dowodem wystąpienia przestępstwa, lecz jedynie wyrażeniem podejrzenia, że w tym momencie takie nadużycie mogło mieć miejsce.

## Literatura

- Baba Y. et al. [1991], *Multivariate Simultaneous Generalized ARCH*, Discussion Paper 92-5, November, Department of Economics, University of California, San Diego.
- Biesta M.A., Doeswijk R.Q., Doker H.A. [2003], *The Profitability of Insider Trading in the Dutch Stock Market*, Working Papers, September, <http://ssrn.com/abstract=498042>.
- Bollerslev T. [1990], *Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Approach*, „Review of Economics and Statistics”, vol. 72, iss. 3.
- Cholewiński R. [2009], *Real-Time Market Abuse Detection with a Stochastic Parameter Model*, „Central European Journal of Economic Modeling and Econometrics”, vol. 1, iss. 3.
- Dyrektywa 2003/6/WE Parlamentu Europejskiego i Rady z dnia 28 stycznia 2003 r. (Dz.Urz. UE L 96).
- Dyrektywa Komisji 2004/72/WE z dnia 29 kwietnia 2004 r. (Dz.Urz. UE L 162).
- Emerson R., Hall S.G., Zalewska-Mitura A. [1987], *Evolving Market Efficiency with an Application to Some Bulgarian Shares*, „Economics of Planning”, vol. 30, iss. 2.
- Fama E.F. [1970], *Efficient Capital Market: A Review of Theory and Empirical Work*, „Journal of Finance”, vol. 25, iss. 2.
- Firth M., Leung T.Y., Rui O.M. [2009], *Insider Trading in Hong Kong: Tests of Stock Returns and Trading Frequency*, Working Papers, no. 4, January, <http://ssrn.com/abstract=1336454>.
- Gurgul H. [2006], *Analiza zdarzeń na rynkach akcji. Wpływ informacji na ceny papierów wartościowych*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków.
- Jaffe J. [1974], *Special Information and Insider Trading*, „Journal of Business”, vol. 47, iss. 3.
- Kerr H.S. [1980], *The Battle of Insider Trading vs. Market Efficiency*, „Journal of Portfolio Management”, vol. 6, nr 4.
- Ma Y., Sun H.L., Yur-Austin J. [2000], *Insider Trading around Stock Split Announcements*, „The Journal of Applied Business Research”, vol. 16, iss. 3.
- Madura J., Wiant K.J. [1995], *Information Content of Bank Insider Trading*, „Applied Financial Economics”, vol. 5, iss. 4.
- Minenna M. [2003], *The Detection of Market Abuse on Financial Markets: A Quantitative Approach*, „Quaderni di Finanza”, vol. 54, May.
- Monteiro N., Zaman Q., Leitterstorf S. [2007], *Updated Measurement of Market Cleanliness*, Financial Securities Authority Occasional Papers 25, March.
- Rockinger M., Urga G. [2000], *The Evolution of Stock Markets in Transition Economies*, „Journal of Comparative Econometrics”, vol. 28, iss. 3.
- Seyhun H.N. [1986], *Insider Profits, Cost of Trading, and Market Efficiency*, „Journal of Financial Economics”, vol. 16, iss. 2.
- Seyhun H.N. [1988], *The Information Content of Aggregate Insider Trading*, „Journal of Business”, vol. 61, iss. 1.
- Ustawa z dnia 29 lipca 2005 r. o obrocie inwestycjami finansowymi (Dz.U. nr 183, poz. 1538).
- Ustawa z dnia 29 lipca 2005 r. o nadzorze nad rynkiem kapitałowym (Dz.U. nr. 183, poz. 1537).

- Ustawa z dnia 21 lipca 2006 r. o nadzorze nad rynkiem finansowym (Dz.U. nr 157, poz. 1119).
- Wiśniewski T.P. [2004], *Empirical Evidence on Economic and Financial Aspects of Intensive Insider Trading*, <http://opus.kobv.de/euv/volltexte/2007/13/pdf/wisniewski.tomasz.pdf>, Frankfurt.
- Worthington A.C., Higgs H. [2003], *Weak-form Market Efficiency in European Emerging and Developed Stock Markets*, School of Economics and Finance Discussion Papers and Working Papers, series 159, September.
- Zalewska-Mitura A., Hall S.G. [1999], *Examining the First Stages of Market Performance: a Test for Evolving Market Efficiency*, *Economic Letters*, vol. 64 (1).
- Zingg A., Lang S., Wyttenbach D. [2007], *Insider Trading in the Swiss Stock Market*, „*Swiss Journal of Economics and Statistics*”, vol. 143, nr 3.

### **Insider Trading on the Warsaw Stock Exchange**

The article serves as an introduction to one phenomenon occurring on world financial markets – the use of confidential information and its influence on financial tools, commonly referred to as insider trading. Using the GARCH model, the article presents an empirical verification of market abuse occurring in real time. Alerts concerning the possible existence of market abuse were selected on the basis of the estimated variability of returns of three companies listed on the Warsaw Stock Exchange. However, the results of this analysis do not prove the existence of insider trading on the Warsaw Stock Exchange, but do hint at its existence, which would have to be investigated by the authorities.

**Keywords:** confidential information, insider trading, GARCH model, conditional covariance, real-time analysis.