

Uniwersytet
Ekonomiczny
w Krakowie

Zeszyty Naukowe

Cracow Review
of Economics
and Management

Nr 4(940)

Kraków 2015

Rada Naukowa

Andrzej Antoszewski (Polska), Slavko Arsovski (Serbia), Josef Arlt (Czechy), Daniel Baier (Niemcy), Hans-Hermann Bock (Niemcy), Ryszard Borowiecki (Polska), Giovanni Lagioia (Włochy), Tadeusz Markowski (Polska), Martin Mizla (Słowacja), David Ost (USA), Józef Pocięcha (Polska)

Komitet Redakcyjny

Janusz Czekał, Jerzy Kornaś, Ryszard Kowalski (sekretarz), Barbara Pawełek, Aleksy Pocztowski (redaktor naczelny), Krystyna Przybylska, Tadeusz Sikora, Grzegorz Strupczewski (sekretarz), Wanda Sułkowska, Krzysztof Woźniak (sekretarz)

Redaktor statystyczny

Paweł Ulman

Redaktorzy Wydawnictwa

Małgorzata Wróbel-Marks, Janina Ziarkowska, Seth Stevens (artykuły i streszczenia w j. angielskim)

Projekt okładki i układ graficzny tekstu

Marcin Sokołowski

Streszczenia artykułów są dostępne w międzynarodowej bazie danych The Central European Journal of Social Sciences and Humanities <http://cejsh.icm.edu.pl> oraz w Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com, a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych i pokrewnych BazEkon http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Kraków 2015

ISSN 1898-6447

Wersja pierwotna: publikacja drukowana
Publikacja jest dostępna w bazie CEEOL (www.ceeol.com)
oraz w czytelni on-line ibuk.pl (www.ibuk.pl)

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie
31-510 Kraków, ul. Rakowicka 27, tel. 12 293 57 42, e-mail: wydaw@uek.krakow.pl
www.zeszyty-naukowe.uek.krakow.pl

Zakład Poligraficzny Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie
31-510 Kraków, ul. Rakowicka 27

Objętość 9,4 ark. wyd.
Zam. 67/2015

Spis treści

Grzegorz Kończak	
O pewnej modyfikacji testu adaptacyjnego dla równości wartości oczekiwanych	5
Stanisław Wanat, Monika Papież, Sławomir Śmiech	
The Conditional Dependence Structure between Precious Metals: A Copula-GARCH Approach	19
Maria Jadamus-Hacura, Krystyna Melich-Iwanek	
Elastyczność polskiego rynku pracy – analiza dynamiczna	35
Marcin Salamaga	
Identyfikacja związków przyczynowych pomiędzy bezpośrednimi inwestycjami zagranicznymi i wzorcem handlu zagranicznego w Polsce	45
Henryk Zawadzki	
Analiza dynamiki modeli wzrostu gospodarczego za pomocą środowiska obliczeniowego <i>Mathematica</i>	59
Agnieszka Lipieta	
Changing Production on the Market with Continuum Traders	71
Zofia Mielecka-Kubieñ, Józef Biolik, Katarzyna Warzecha, Andrzej Wójcik	
Wybrane aspekty społeczno-ekonomicznych skutków uzależnienia od hazardu	85
Monika Papież	
The Application of a Rolling Causality Test for Analysing Dependencies between the Prices of Corn, Crude Oil and Ethanol	101

Sławomir Śmiech

Co-movement of Commodity Prices – Results from Dynamic Time Warping Classification	117
---	------------

Grzegorz Tarczyński

Algorytm składowania dedykowanego optymalizujący czas kompletacji wyrobów	131
--	------------

Monika Miśkiewicz-Nawrocka, Katarzyna Zeug-Żebro

Ocena stopnia zagrożenia bezrobociem województw Polski w latach 2005–2012	145
--	------------

Grzegorz Kończak

Katedra Statystyki

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

O pewnej modyfikacji testu adaptacyjnego dla równości wartości oczekiwanych*

Streszczenie

W opracowaniu przedstawiono propozycję modyfikacji testu adaptacyjnego dla porównania wartości oczekiwanych w dwóch populacjach. W zaproponowanym rozwiązaniu nie dokonuje się wyboru postaci statystyki testowej, lecz na podstawie danych pochodzących z wylosowanej próbki modyfikowane są wagi występujące w statystyce testowej. Własności rozważanego testu i testów klasycznych zostały porównane z wykorzystaniem symulacji komputerowych. Test może być wykorzystany w procedurach kontroli jakości. Nie wymaga on spełnienia ostrych założeń dotyczących postaci rozkładu zmiennej diagnostycznej i z tego powodu może być wykorzystywany do wykrywania rozregulowania procesu w przypadkach, gdy nie jest znana postać rozkładu zmiennej.

Słowa kluczowe: testy adaptacyjne, testy permutacyjne, porównanie populacji, Monte Carlo.

1. Wprowadzenie

Testy adaptacyjne należą do stosunkowo rzadko wykorzystywanych w praktyce badań ekonomicznych narzędzi statystycznych. Testy te zostały zaproponowane dla poprawienia skuteczności wnioskowania statystycznego w przypadkach,

* Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2011/03/B/HS4/05630.

gdy nie są spełnione założenia stosowania klasycznych testów parametrycznych. W takich sytuacjach możliwe jest skorzystanie z testów nieparametrycznych, jednak charakteryzują się one mniejszą mocą niż ich odpowiedniki parametryczne. Testy adaptacyjne miały zapewnić moc porównywalną z testami parametrycznymi przy jednoczesnym osłabieniu założeń. Istotą testów adaptacyjnych jest modyfikacja procedury obliczeniowej w zależności od wylosowanej próby. Przykładem testu adaptacyjnego jest test t dla porównania wartości oczekiwanych, w którym w zależności od porównania wariancji w badanych populacjach wykorzystuje się jedną z dwóch postaci statystyki testowej.

W opracowaniu przedstawiono propozycję testu adaptacyjnego dla porównania wartości oczekiwanych w dwóch populacjach. W zaproponowanym rozwiązaniu nie dokonuje się wyboru postaci statystyki testowej, lecz na podstawie danych pochodzących z wylosowanej próbki modyfikowane są wagi występujące w statystyce testowej. Własności rozważanego testu i testów klasycznych zostały porównane z wykorzystaniem symulacji komputerowych. Proponowany test może być wykorzystany w procedurach monitorowania jakości procesów. Test nie wymaga spełnienia ostrych założeń dotyczących postaci rozkładu zmiennej diagnostycznej i z tego powodu pozwala wykryć rozregulowania procesu w przypadku różnych postaci rozkładu. Wszystkie symulacje i obliczenia wykonano z wykorzystaniem programów R oraz *Mathematica*.

2. Porównania populacji

Jednym z kluczowych zadań związanych z badaniami statystycznymi są porównania populacji. Porównania mogą dotyczyć parametrów populacji (wartości oczekiwane, wariancje, wskaźniki struktury) lub np. postaci funkcyjnej rozkładów (porównanie dystrybuant lub funkcji gęstości). Badania mogą prowadzić do porównań dwóch populacji lub k populacji, gdzie $k > 2$. Przykładami testów parametrycznych, które do takich zadań są stosowane mogą być testy: t dla wartości oczekiwanych, test F równości wariancji, ANOVA, porównanie frakcji dwóch populacji.

Testy mogą być stosowane przy odpowiednich założeniach. Jeżeli nie są spełnione założenia dotyczące postaci rozkładu, to zwykle nie można odwołać się do testów parametrycznych. Dobrą alternatywą w takim przypadku są testy nieparametryczne. Testy takie charakteryzują się jednak zazwyczaj mniejszą mocą, co prowadzi do znacznie większych trudności w potwierdzeniu występujących różnic w populacjach. Przykładami takich testów są testy wykorzystujące rangi lub empiryczne dystrybuanty [Sheskin 2003, Domański i Pruska 2000]: U Manna-Whitney'a, Kruskala-Wallisa, Kołmogorowa-Smirnova.

W wielu przypadkach pomocne mogą być testy adaptacyjne, których zastosowanie często pozwala na osłabienie założeń dotyczących postaci rozkładów (jak w testach nieparametrycznych), a jednocześnie zapewniają dużą moc (jak w testach parametrycznych).

3. Testy adaptacyjne

Testy wykorzystujące dane próbkowe do modyfikacji statystyki lub procedury testowej określane są testami adaptacyjnymi [O’Gorman 2012]. Do najbardziej znanych testów adaptacyjnych należy zaliczyć test t dla równości wartości oczekiwanych. Weryfikowana hipoteza i hipoteza alternatywna mogą być zapisane następująco:

$$H_0 : m_1 = m_2,$$

$$H_1 : m_1 \neq m_2,$$

W różnych problemach hipoteza alternatywna może być formułowana jako hipoteza kierunkowa. W zależności od wyniku porównania wariancji badanych populacji wykorzystywana jest jedna z dwóch następujących statystyk:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \quad (1)$$

lub

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}, \quad (2)$$

gdzie: $\bar{X}_1, \bar{X}_2, S_1^2, S_2^2, n_1, n_2$ to odpowiednio średnie, wariancje oraz liczebności pobranych prób.

Statystyka (1) stosowana jest dla populacji o jednakowych wariancjach, natomiast statystyka (2) dla populacji o różnych wariancjach. Przy założeniu hipotezy H_0 i spełnieniu stosownego warunku dotyczącego równości wariancji statystyka (1) ma rozkład t -Studenta o $k = n_1 + n_2 - 2$ stopniach swobody, a staty-

styka (2) rozkład t -Studenta o $k = \frac{\left(\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{\hat{S}_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{\hat{S}_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$ stopniach swobody. Dla stoso-

wania testu t próby powinny być pobrane z populacji o rozkładach normalnych. Dopuszczalne są niewielkie odstępstwa od normalności rozkładu.

R.V. Hogg, D.M. Fisher i R.H. Randles [1975] zaproponowali test adaptacyjny (w dalszej części dla testu przyjęto oznaczenie *HFR*) dla porównania wartości oczekiwanych, dla którego nie jest wymagane spełnienie założenia normalności rozkładów. Po wylosowaniu prób z dwóch populacji o dowolnych ciągłych rozkładach wyznaczane są odporne oceny asymetrii Q_3 i kurtozy Q_4 dla łączonych prób.

$$Q_3 = \frac{\bar{U}_{0,05} - \bar{M}_{0,50}}{\bar{M}_{0,50} - \bar{L}_{0,05}}, \quad (3)$$

$$Q_4 = \frac{\bar{U}_{0,05} - \bar{L}_{0,05}}{\bar{U}_{0,50} - \bar{L}_{0,50}}, \quad (4)$$

gdzie: $\bar{U}_a, \bar{L}_a, \bar{M}_a$ to odpowiednio średnie z $100a\%$ największych, najmniejszych i środkowych wartości połączonych prób.

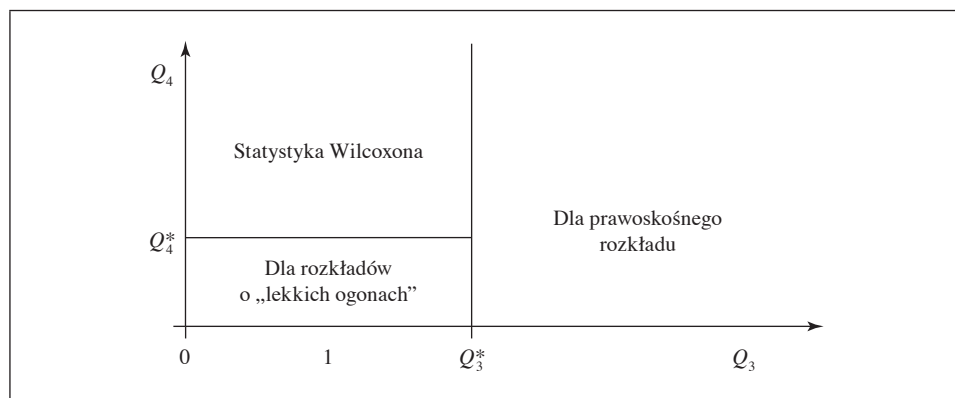
W zależności od wartości statystyk Q_3 i Q_4 do weryfikacji hipotezy o równości wartości oczekiwanych wybierana jest statystyka testu mediany, testu Wilcoxona, testu dla prawoskośnego rozkładu lub dla rozkładu o „lekkich ogonach”. Schemat wyboru statystyki przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Schemat wyboru statystyki dla testu *HFR*

Źródło: opracowanie własne na podstawie: [O’Gorman 2012].

Zmodyfikowaną postać testu *HFR* przedstawiają L. Hao i D. Houser [2012] (w dalszej części oznaczanego jako test *HH*). L. Hao i D. Houser na podstawie przeprowadzonych symulacji wykazali, że granice obszarów powinny być nieco inaczej wyznaczone (por. rys. 2, Q_3^* wynosi 2,1 a Q_4^* dla prób o liczebności 11–15



Q_3^* wynosi 2,1, a Q_4^* dla prób o liczebności 11–15 2,0, a dla większych od 15 2,1.

Rys. 2. Schemat wyboru statystyki dla modyfikacji *HH*

Źródło: opracowanie własne na podstawie: [Hao i Houser 2012].

2,0, a dla większych od 15 2,1). Zaproponowali również odrzucenie obszaru, dla którego przeprowadzono test mediany ze względu na słabą moc testu.

4. Propozycja adaptacyjnej statystyki testowej

Zarówno test *HFR*, jak i modyfikacja zaproponowana przez L. Hao i D. Houser charakteryzują się pewną nieciągłością. W pobliżu granic wyróżnionych obszarów zaznaczonych na rys. 1 i 2 nawet bardzo niewielka zmiana danych próbkowych może prowadzić do zmiany procedury testowej, a w konsekwencji do podjęcia innej decyzji przy weryfikacji hipotezy. Przedstawiana w dalszej części modyfikacja procedury testowej ma za zadanie usunięcie wskazanej niedogodności.

Propozycja modyfikacji oparta jest na projekcie zaproponowanym przez R.V. Hogg i współpracowników [1975] z uwzględnieniem wyników prac L. Hao i D. Houser związane z potrzebą odrzucenia testu mediany. Podobnie jak w powyżej przedstawionych testach wyznaczone są odporne mierniki asymetrii (3) i kurtozy (4). Przyjęto trzy obszary (por. rys. 2), jednak zamiast dokonywania wyboru statystyki testowej przyjmuje się postać funkcyjną statystyki z wagami. Statystyka ta może zostać zapisana następująco:

$$T = \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \alpha_3 T_3, \quad (5)$$

gdzie: T_1 , T_2 i T_3 (T_1 – statystyka testu Wilcoxona, T_2 – statystyka testu dla prawoskośnego rozkładu, T_3 – statystyka testu dla rozkładów o „lekkich ogonach”) są statystykami wykorzystywanymi zgodnie ze schematem na rys. 2. Statystyki te mogą być zapisane następująco (por. [Hao i Houser 2012])

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n_1} R_i - \frac{n_1(n_1+1)}{2},$$

gdzie: R_i – ranga i -tej obserwacji w połączonych próbach.

$$T_j = \sum_{i=1}^{n_1} a(R_i) \quad \text{dla } j = 2, 3,$$

gdzie: $a(R_i)$ dla statystyki T_2 określone jest następująco:

$$a(R_i) = \begin{cases} R_i - \text{floor}[25\%(N+1)] - 1 & \text{dla } R_i \leq (N+1)/2 \\ 0 & \text{dla } R_i > (N+1)/2 \end{cases}$$

gdzie $\text{floor}(x)$ oznacza zaokrąglenie wartości x do największej liczby całkowitej mniejszej lub równej x .

Dla statystyki T_3 wielkości $a(R_i)$ są określone następująco

$$a(R_i) = \begin{cases} R_i - \text{floor}[25\%(N+1)] - 0,5 & \text{dla } R_i \leq 25\%(N+1) \\ R_i - \text{ceiling}[75\%(N+1)] - 0,5 & \text{dla } R_i \geq 75\%(N+1) \\ 0 & \text{dla } R_i \in (25\%(N+1), 75\%(N+1)) \end{cases}$$

a $\text{ceiling}(x)$ to zaokrąglenie wartości x do najmniejszej liczby całkowitej większej lub równej x .

Kluczowy w prezentowanej modyfikacji testu *HFR* jest dobór wag α_1 , α_2 i α_3 występujących we wzorze (5). Wagi powinny być tak dobrane, aby w danym obszarze największa była waga dla statystyki wykorzystywanej w tym obszarze przez test *HFR*. Niech dane punkty $P_1(x_1, y_1) = P_1(1, 3)$, $P_1(x_2, y_2) = P_2(3, 2)$ oraz $P_1(x_3, y_3) = P_3(1, 1)$. Wówczas wagi niech będą określone następująco

$$\alpha_i = \alpha_i(x, y) = \frac{w_i(x, y)}{W(x, y)} \quad \text{dla } i = 1, 2, 3,$$

gdzie: $w_i(x, y) = e^{-[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2]}$ dla $i = 1, 2, 3$.

$$W(x, y) = \sum_{i=1}^3 w_i(x, y),$$

gdzie: (x_i, y_i) jest punktem przyjętym jako reprezentant i -tego obszaru. Takie określenie wag zapewnia, że w poszczególnych obszarach (rys. 2) największa waga odpowiada statystyce wykorzystywanej w teście *HFR*.

Ponieważ rozkład statystyki (5) w ogólnym przypadku nie jest znany, do podjęcia decyzji odnośnie do hipotezy H_0 zostanie wykorzystany test permutacyjny (por. [Good 2005]). Po pobraniu prób o liczebnościach n_1 i n_2 obliczana jest wartość statystyki i oznaczana przez T_0 . Następnie połączone próby B -krotnie ($B \geq 1000$) są losowo dzielone na dwie o liczebnościach n_1 i n_2 . Każdorazowo obliczana jest wartość statystyki T_i ($i = 1, 2, \dots, B$). Ostateczna decyzja podejmowana jest na podstawie oceny *ASL* (*achieving significance level*). Ocena *ASL* w przy-

padku hipotezy alternatywnej obustronnej przy poziomie istotności $\alpha = 0,05$ przyjmuje postać (por. [Efron i Tibshirani 1993]):

$$\hat{ASL} = \frac{\text{card}\{i : T_i > T^{(0,975)} \vee T_i < T^{(0,025)}\}}{B}, \quad (6)$$

gdzie: $T^{(q)}$ jest kwantylem rzędu q empirycznego rozkładu statystyki T , która jest kombinacją liniową statystyk T_1, T_2 i T_3 (por. 5).

5. Analiza symulacyjna

Celem przeprowadzonego badania było porównanie wyników testowania hipotezy o równości wartości oczekiwanych testem HH , testem t oraz proponowaną modyfikacją (oznaczenie $mHFR$). Analizy przeprowadzono z wykorzystaniem symulacji komputerowych. Próby o liczebności $n_1 = n_2 = 15$ były pobierane z populacji o różnych charakterystykach. W analizach uwzględniono rozkłady opisywane w [O’Gorman 2012]: D_1 – jednostajny, D_2 – normalny, D_3 – t -Studenta, D_4 – dwumodalny symetryczny (mieszanka rozkładów normalnych), D_5 – skośny z małą kurtozą (uogólniony rozkład lambda), D_6 – dwumodalny skośny (mieszanka rozkładów normalnych). Charakterystyka powyższych rozkładów została przedstawiona w tabeli 1.

Tabela 1. Charakterystyka rozkładów wykorzystywanych w symulacjach

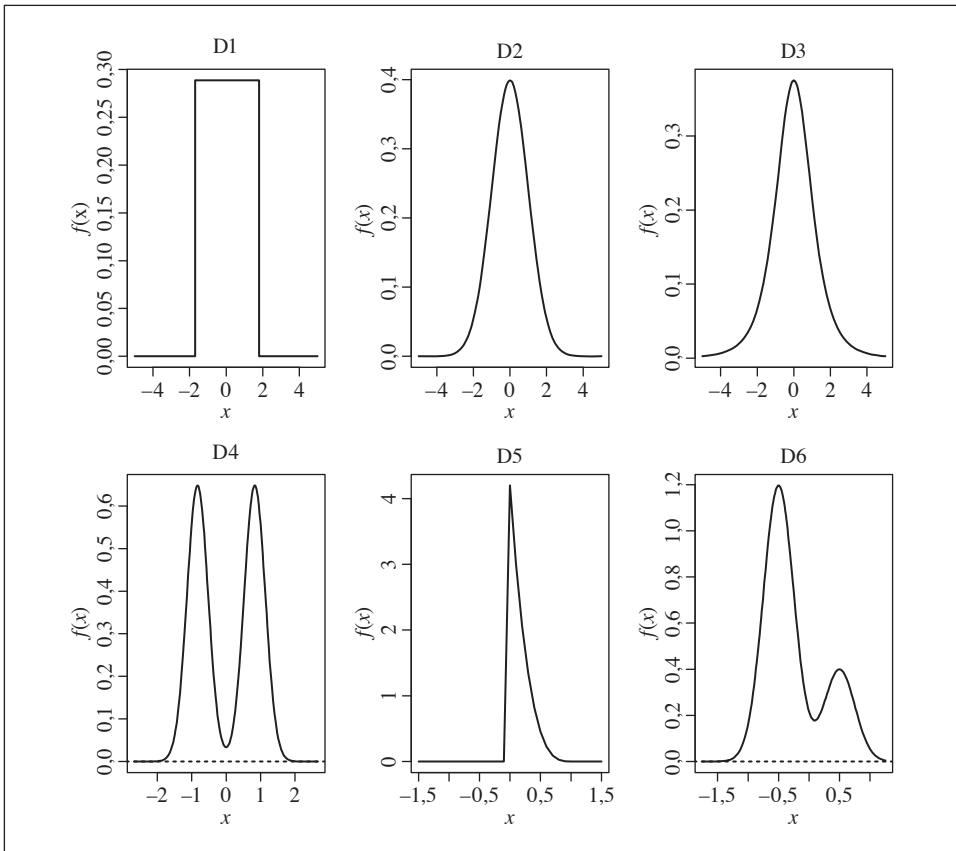
Rozkład	Opis	Oznaczenie i parametry
D_1	jednostajny	$U[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$
D_2	normalny standardowy	$N(0, 1)$
D_3	t -Studenta o 4 stopniach swobody	t_4
D_4	mieszanka rozkładów normalnych	$\frac{1}{2}N\left(-\sqrt{\frac{9}{13}}, \frac{4}{13}\right) + \frac{1}{2}N\left(\sqrt{\frac{9}{13}}, \frac{4}{13}\right)$
D_5	uogólniony rozkład lambda	$\Lambda(0; 1; 1; 4,2)$
D_6	dwumodalny skośny	$\frac{2}{3}N\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}N\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$

Źródło: opracowanie własne na podstawie: [Hao i Houser 2012].

Wykresy gęstości rozważanych rozkładów przedstawiono na rys. 3. We wszystkich przeprowadzonych symulacjach przyjęto poziom istotności $\alpha = 0,05$. Przebieg procedury symulacyjnej był następujący:

1) generowano dwie próbki o liczebnościach $n_1 = n_2 = 15$ z rozkładów D_1 – D_6 . Dla każdego rozkładu generowano 1000 par próbek. Rozważano dwa przypadki:

- H_0 prawdziwa,
 - H_0 fałszywa – druga z próbek miała zawsze wartość oczekiwaną powiększoną o $\delta = 0,6\sigma$;
- 2) na podstawie danych połączonych prób obliczano mierniki (3) i (4) i na tej podstawie wyznaczano współczynniki funkcji testowej (5);
- 3) obliczano wartość statystyki T_0 . Następnie przeprowadzano losowy podział połączanego zbioru i obliczano wartość statystyki T_i ($i = 1, 2, \dots, 1000$);
- 4) podejmowano decyzję na podstawie (6).



Rys. 3. Gęstości rozważanych rozkładów

Źródło: opracowanie własne w programie R.

W tabeli 2 przedstawiono wyniki przeprowadzonych analiz symulacyjnych. Zaprezentowano wyniki dla przypadku, gdy H_0 jest prawdziwa (rozmiar testu) oraz gdy H_0 jest fałszywa (moc testu). Ponieważ wszystkie analizy były przepro-

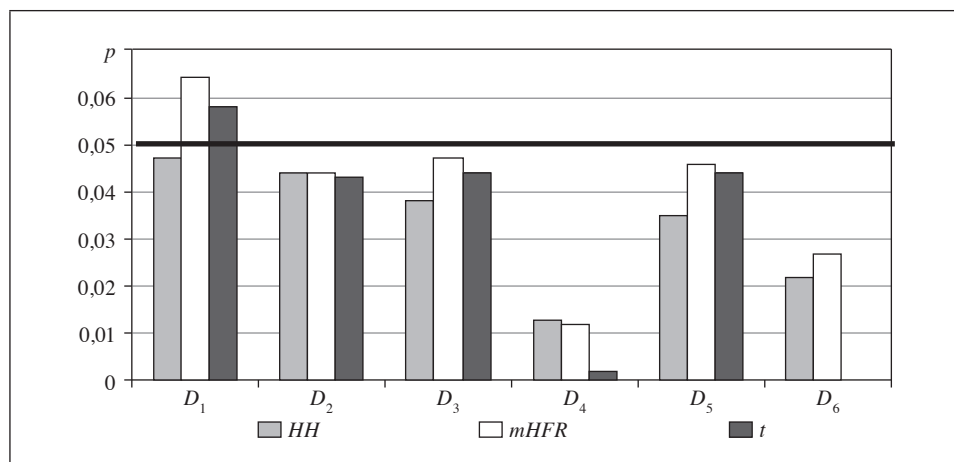
wadzone przy poziomie istotności $\alpha = 0,05$, to prawdopodobieństwa odrzucenia H_0 , gdy jest prawdziwa, powinny być bliskie 0,05. Takie wartości pozwalają potwierdzić, że wnioskowanie odbywa się na przyjętym poziomie istotności.

Tabela 2. Ocena rozmiaru proponowanego testu i mocy dla wybranych rozkładów

Rozkład	Rozmiar testu ($\delta = 0$)			Moc testu ($\delta = 0,6\sigma$)		
	<i>HH</i>	<i>mHFR</i>	<i>t</i>	<i>HH</i>	<i>mHFR</i>	<i>t</i>
D_1	0,047	0,064	0,058	0,125	0,120	0,103
D_2	0,044	0,044	0,043	0,320	0,371	0,388
D_3	0,038	0,047	0,044	0,419	0,446	0,399
D_4	0,013	0,012	0,002	0,894	0,715	0,116
D_5	0,035	0,046	0,044	0,421	0,568	0,376
D_6	0,022	0,027	0,000	0,940	0,978	0,039

Źródło: opracowanie własne.

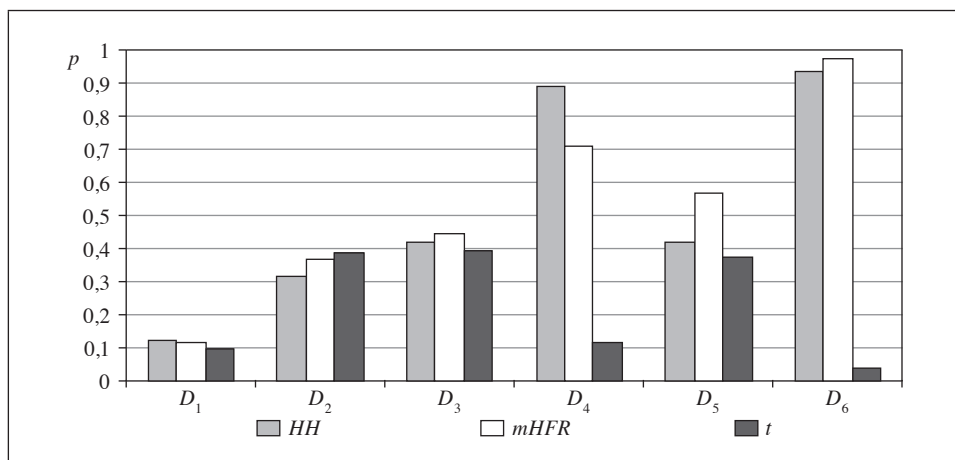
W przypadku gdy H_0 jest fałszywa, przyjmowano, że wartość oczekiwana drugiej próbki jest o $0,6\sigma$ większa od wartości oczekiwanej pierwszej próby. Wyniki symulacji zamieszczone w tabeli 2 zostały zobrazowane na rys. 4 i 5.



Rys. 4. Rozmiar testów

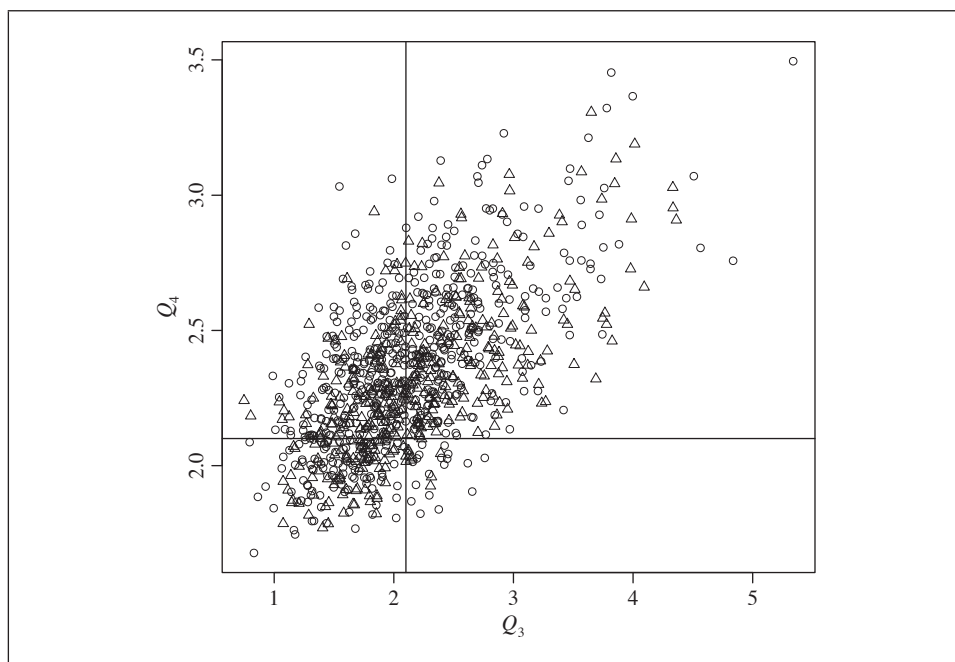
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z tabeli 2.

Dla rozkładów D_4 i D_6 test t nie prowadzi do weryfikacji hipotezy przy poziomie istotności $\alpha = 0,05$. Prawdopodobieństwa odrzucenia H_0 są znacznie mniejsze niż przyjęty poziom istotności. Dla pozostałych rozkładów wniosko-



Rys. 5. Moc testów

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z tabeli 2.



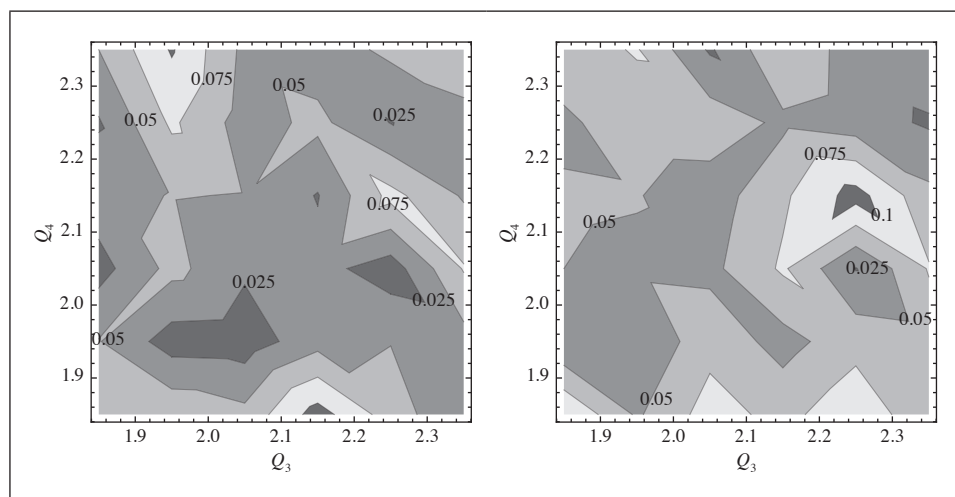
Rys. 6. Rezultaty weryfikacji hipotezy H_0 (Δ – odrzucenie, \circ – brak podstaw do odrzucenia) w zależności od Q_3 i Q_4

Źródło: opracowanie własne.

wanie jest przeprowadzane zgodnie z przyjętym poziomem istotności. Moc testów HH oraz proponowanej modyfikacji we wszystkich rozważanych przypadkach $mHFR$ jest zbliżona.

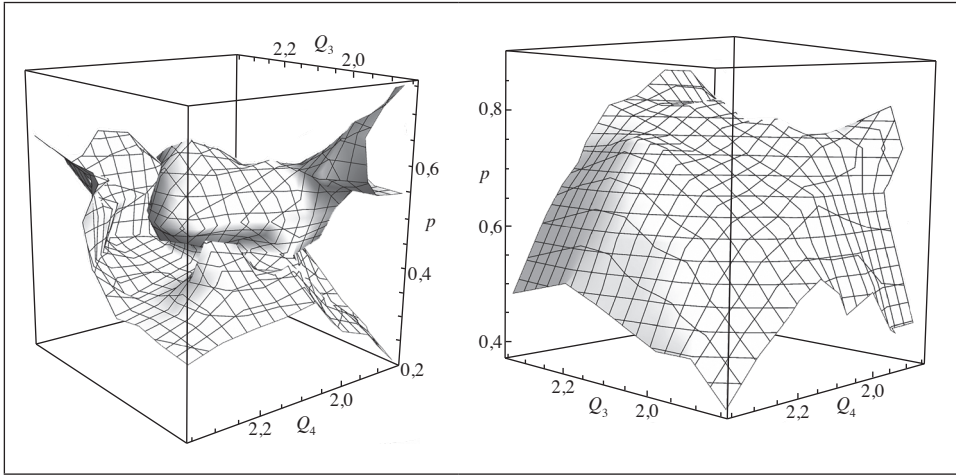
Istotą przedstawionej propozycji jest usunięcie swoistej nieciągłości związanej z testami HFR i HH w pobliżu granic, gdy wartości Q_3 lub Q_4 są bliskie 2,0 lub 2,1 (por. rys. 1 i 2). Dla uzyskania ocen rozmiaru ($\delta = 0$) i mocy testów ($\delta = 0,6\sigma$) HH i $mHFR$ przeprowadzono 10 000 symulacji dla danych generowanych z rozkładu D_5 . Pierwsze 500 wyników testu $mHFR$ przedstawiono na rys. 6. Symbole trójkąta oznaczają odrzucenie H_0 , a symbole koła brak podstaw do odrzucenia H_0 .

Na rys. 7 przedstawiono wykresy konturowe rozmiaru testów HH oraz $mHFR$ (hipoteza H_0 prawdziwa) w obszarze $Q_3 \times Q_4 \in [1,8; 2,4] \times [1,8; 2,4]$, czyli w obszarze, gdzie w teście HH wykorzystywane są trzy warianty statystyki testowej. Rozmiar obu testów jest na podobnym poziomie i charakteryzuje się zbliżonym zróżnicowaniem. Na rys. 8 przedstawiono oceny prawdopodobieństwa odrzucenia hipotezy H_0 w przypadku, gdy jest ona fałszywa dla rozkładu D_5 . W tym przypadku dość wyraźnie widać brak regularności dla testu HH . Ze względu na konstrukcję statystyki testowej (5) charakterystyczna dla testu HH nieregularność nie występuje w przypadku testu $mHFR$. Przy wykreśleniu funkcji rozmiaru oraz mocy testów (rys. 7 i 8) wykorzystano funkcje programu *Mathematica* pozwalające na rekonstrukcję przestrzennego wykresu na podstawie informacji o punktowych wartościach funkcji (ocenie rozmiaru i mocy testów).



Rys. 7. Oceny rozmiaru testów (H_0 prawdziwa) dla testu HH (po lewej) oraz testu $mHFR$ (po prawej)

Źródło: opracowanie własne w programie *Mathematica*.



Rys. 8. Oceny mocy testów (H_0 fałszywa) dla testu HH (po lewej) oraz testu $mHFR$ (po prawej)

Źródło: opracowanie własne w programie *Mathematica*.

6. Podsumowanie

Testy adaptacyjne są rzadko wykorzystywane w badaniach ekonomicznych. W artykule przedstawiono propozycję modyfikacji testu adaptacyjnego dla porównania wartości oczekiwanych w dwóch populacjach. Test nie wymaga spełnienia założeń o postaci rozkładu, dlatego może być wykorzystywany np. w procedurach kontroli jakości, gdy nie jest znany rozkład zmiennej diagnostycznej. Wykorzystując symulacje komputerowe, przeprowadzono porównania własności proponowanego testu oraz testu Hogga i Housera. Proponowana modyfikacja charakteryzuje się zbliżoną mocą do mocy testu HH . Ze względu na konstrukcję statystyki testowej funkcja mocy testu jest bardziej regularna niż w przypadku testu HH , gdzie w zależności od wartości odpornych mierników asymetrii i kurtozy są wykorzystywane różne postaci statystyki testowej. Należy jednak podkreślić, że ze względu na wykorzystanie testu permutacyjnego niezbędne jest wykonanie złożonych obliczeń, więc stosowanie proponowanej modyfikacji jest nieco bardziej uciążliwe i nie zawsze będzie możliwe jej wykorzystanie w praktyce.

Literatura

- Domański C., Pruska K. [2000], *Nieklasyczne metody statystyczne*, PWE, Warszawa.
- Efron B., Tibshirani R. [1993], *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman & Hall/ CRC, Boca Raton, Washington, DC.
- Good P. [2005], *Permutation, Parametric, and Bootstrap Tests of Hypotheses*, Springer, New York.
- Hao L., Houser D. [2012], *Adaptive Procedures for Wilcoxon-Mann-Whitney Test: Seven Decades of Advances*, <http://comp.uark.edu/~lhao/adaptive.pdf>.
- Hogg R.V., Fisher D.M., Randles R.H. [1975], *A Two-sample Adaptive Distribution-free Test*, „Journal of the American Statistical Association”, vol. 70, <http://dx.doi.org/10.2307/2285950>.
- O’Gorman T.W. [2012], *Adaptive Tests of Significance Using Permutations of Residuals with R and SAS*, John Wiley and Sons, New Jersey.
- Sheskin D.J. [2003], *Handbook of Parametric and Nonparametric Statistical Procedures*, Chapman & Hall, Boca Raton.

On the Modification of the Adaptive Test for Comparing Means

(Abstract)

The paper presents a proposal of a modification of the L. Hao and D. Houser adaptive test for comparing the locations of two distributions. The modification is based on the linear combination of three test statistics. In the Hao and Houser test, due to the values of the robust asymmetry and shape characteristics, the test statistic is chosen. A method of continuous modification of the test statistic is presented. The properties of the proposed procedure are analyzed in a Monte Carlo study. The proposal could be used in quality control monitoring processes.

Keywords: adaptive tests, permutation tests, comparing populations, Monte Carlo.

Stanisław Wanat

Monika Papież

Sławomir Śmiech

Department of Statistics

Cracow University of Economics

The Conditional Dependence Structure between Precious Metals: A Copula-GARCH Approach*

Abstract

The aim of the paper is to analyse the conditional dependence structure between precious metal returns using a copula-DCC-GARCH approach. Conditional correlation matrices are used to identify the states of the precious metals market by assuming that a given state of the market corresponds to a typical pattern of the conditional dependence structure. Cluster analysis allows for pointing at transition points between the market states, that is the points of drastic change in the conditional dependence structure. The application of the methodology described above to the period between 1997 and 2013 indicates three market states of four major precious metals (gold, silver, platinum and palladium). The results obtained reveal a sudden increase in dependencies between precious metals at the turn of April and May 2004.

Keywords: precious metals, dependence structure, copula-GARCH, market states.

* Supported by the grant No. 2012/07/B/HS4/00700 of the Polish National Science Centre.

1. Introduction

Gold, platinum, palladium and silver are the most common precious metals. For centuries they have been primarily used to make jewellery, while nowadays they also play an important part in various industries. For example, gold is used in electronics, telecommunications and aviation, silver is used in the electronics and electrical industries (mobile phones, computer hardware), and, to a smaller extent, in photography. Platinum is mostly used in the chemical and petrochemical industries as a catalyst and in the motor industry for building catalytic converters, as well as in the electronic and electrical industries. In recent years these metals have become an important means of thesaurisation, and are now frequently used as an investment through, for instance, the purchase of gold bars or the purchase of precious metal-focused exchange traded funds. Such funds allow for the investment in metals without the need to actually possess them (iShares Gold Trust has been traded since January 2005 while the iShares Silver Trust was created in April 2006).

The existing research on precious metals focuses mainly on gold and silver. The analysis of the prices of precious metals can be divided into two areas. The first one covers the analysis of the relationship between prices of precious metals. C. Ciner (2001) finds evidence of the disappearance of the long-term relationship between gold and silver in the 1990s. His conclusion has been contested by B. M. Lucey and E. Tully (2006), who say that that relationship strengthens and weakens over time but prevails in the long run. Similarly, R. Sari, S. Hammoudeh and B. T. Ewing (2007) observe a strong relationship between gold and silver. S. Śmiech and M. Papież (2012) show that the causality between the prices of gold, silver, platinum and copper changed between 2000 and 2011. M. Papież and S. Śmiech (2012) have also examined causality in mean and variance between commodity prices (including metal prices) and financial market prices.

Another area of analysis examines the volatility of returns on these four precious metals. S. Hammoudeh and Y. Yuan (2008) showed that gold and silver have similar volatility persistence globally, but there is no leverage effect in gold and silver prices. R. Sari, S. Hammoudeh and U. Soytas (2010) examined the co-movements and information transmission among the spot prices of four precious metals (gold, silver, platinum, and palladium), the price of oil, and the US dollar/euro exchange rate. S. Hammoudeh *et al.* (2010) looked at the conditional volatility and correlation dependence for four major precious metals, and found that almost all of them are weakly responsive to news spilled over from other metals in the short run. L. Morales and B. Andreosso-O'Callaghan (2011) found that an asymmetric effect is observed where volatility spillovers are concerned. Gold tends to be the dominant market and the evidence favouring the case of other

precious metals influencing the gold market is weak. S. J. Cochran, I. Mansur and B. Odusami (2012) showed that post-September 2008 events increased the volatility in gold, platinum, and silver returns. A. Sensoy (2013) claims that the turbulence that characterised 2008 did not have a significant effect on the volatility levels of gold and silver, though it caused an upward shift in the volatility of palladium and platinum. Using the consistent dynamic conditional correlations, he shows that precious metals became strongly correlated with each other during the last decade, which reduces the diversification benefits across them and indicates a convergence to a single asset class.

The objective of this study is to identify the states of the precious metals market (gold, silver, platinum and palladium) and to present their evolution in time for the period from September 22, 1997 to February 13, 2014. Since our sample period covers the recent global financial crisis, we want to examine whether the market states are affected by the financial crisis. The process of identifying the states of the precious metals market and analysing their temporal evolution is based on the conditional dependence structure using a copula-DCC-GARCH methodology.

This allows us to address several questions, which might be of interest to both investors and researchers:

- is the dependence between prices in the precious metals markets stable or does it undergo changes?
- are the changes in relations between precious metal prices evolutionary or drastic?
- what are the causes of drastic changes in relations between these prices?

The paper contributes to the existing literature in the following aspects. Firstly, most analyses of the precious metals market conducted so far have been based on standard multivariate GARCH (MGARCH) models (see e.g. Hammoudeh *et al.* 2010, Morales & Andreosso-O'Callaghan 2011, Sensoy 2013, Silvennoinen & Thorp 2013), all of which assume that standardised innovations follow a multivariate elliptical distribution. In the case of the multivariate normal distribution, all marginal distributions must be normal, and multivariate Student's *t* distribution imposes, also often unrealistically, the same degrees of freedom for all marginal distributions.

However, the copula-based multivariate GARCH model used in this study allows for modelling the conditional dependence structure when standardised innovations are non-elliptically distributed. Thus, it makes it possible to model the volatility of particular metals using univariate GARCH models with different standardised residual distribution. Generally, copulas allow the researcher to specify the models for the marginal distributions separately from the dependence structure that links these distributions to form a joint distribution. They offer a greater

flexibility in modelling and estimating margins than do parametric multivariate distributions (see e.g. Nelsen 1999, Joe 1997).

Secondly, at present copula-GARCH methodology is widely used in the analysis of financial time series (see e.g. Patton 2006, Serban *et al.* 2007, Lee & Long 2009, Doman 2011, Wu, Chung & Chang 2012, Aloui, Ben Aïssa & Nguyen 2013, Li & Yang 2013, Philippas & Siriopoulos 2013, Zolotko & Okhrin 2014). For a review of the literature, see (Patton 2012). However, in most studies on the precious metals market, copula methodologies are used to analyse the dependencies between single metal markets and other markets (see e.g. Reboredo 2013a, 2013b). This study is based on conditional correlations using a copula-GARCH methodology to investigate the dynamics of the conditional dependence structure between precious metals. It also attempts to identify the states of the market on the basis of these conditional correlations and to follow their temporal evolution. To the best of our knowledge, such an approach has never been applied to investigate dependencies in the precious metals markets.

The paper is organised as follows. Section 2 describes the data and econometric methodologies employed, while the empirical results are discussed in Section 3 followed by the conclusions.

2. Methodology

The dynamic relationship between precious metals is analysed with the use of a copula-DCC-GARCH model for daily log-returns. In this approach, multivariate joint distributions of the return vector $r_t = (r_{1,t}, \dots, r_{k,t})'$, $t = 1, \dots, T$, conditional on the information set available at time $t - 1$ (Ω_{t-1}) to be modelled using the conditional copulas introduced by Patton (2006). This model takes the following form:

$$r_{1,t} | \Omega_{t-1} \sim F_{1,t}(\cdot | \Omega_{t-1}), \dots, r_{k,t} | \Omega_{t-1} \sim F_{k,t}(\cdot | \Omega_{t-1}) \quad (1)$$

$$r_t | \Omega_{t-1} \sim F_t(\cdot | \Omega_{t-1}) \quad (2)$$

$$F_t(r_t | \Omega_{t-1}) = C_t \left(F_{1,t}(r_{1,t} | \Omega_{t-1}), \dots, F_{k,t}(r_{k,t} | \Omega_{t-1}) \right) | \Omega_{t-1}, \quad (3)$$

where C_t denotes the copula, while F_t and $F_{i,t}$ respectively – the joint cumulative distribution function and the cumulative distribution function of the marginal distributions at time t .

Univariate rates of return $r_{i,t}$ are modelled using ARMA-GARCH processes:

$$r_{i,t} = \mu_{i,t} + y_{i,t}, \quad (4)$$

$$\mu_{i,t} = E(r_{i,t} | \Omega_{t-1}), \quad \mu_{i,t} = \mu_{i0} + \sum_{j=1}^{P_i} \varphi_{ij} r_{i,t-j} + \sum_{j=1}^{Q_i} \theta_{ij} y_{i,t-j}, \quad (5)$$

$$y_{i,t} = \sqrt{h_{i,t}} z_{i,t}, \quad (6)$$

$$h_{i,t} = \text{Var}(r_{i,t} | \Omega_{t-1}), \quad h_{i,t} = \omega_i + \sum_{j=1}^{p_i} \alpha_{ij} y_{i,t-j}^2 + \sum_{j=1}^{q_i} \beta_{ij} h_{i,t-j}, \quad (7)$$

where $z_{i,t}$ are i.i.d. random variables which conditionally follow some distributions with the required properties (in the empirical analysis the following distributions are considered: normal distribution, skew-normal distribution, student- t , skew-student, generalised error distribution).

The dependence structure of the margins is then assumed to follow an elliptical copula¹ with conditional correlations R_t . The dynamics of R_t is modelled with the use of the dynamic conditional correlation model DCC (m, n):

$$H_t = D_t R_t D_t, \quad (9)$$

$$D_t = \text{diag}(\sqrt{h_{1,t}}, \dots, \sqrt{h_{k,t}}), \quad (10)$$

$$R_t = (\text{diag}(Q_t))^{-1/2} Q_t (\text{diag}(Q_t))^{-1/2}, \quad (11)$$

$$Q_t = \left(1 - \sum_{j=1}^m c_j - \sum_{j=1}^n d_j \right) \bar{Q} + \sum_{k=1}^m c_j (\varepsilon_{t-j} \varepsilon'_{t-j}) + \sum_{k=1}^n d_j Q_{t-j}, \quad (12)$$

where conditional variances $h_{i,t}$ are modelled with the use of one-dimensional GARCH(p, q) processes (7), $\varepsilon_t = D_t^{-1} y_t$ ($y_t = (y_{1,t}, \dots, y_{k,t})'$) and \bar{Q} is an unconditional covariance matrix of standardised residuals ε_t . In specification (12) c_j ($j = 1, \dots, m$), d_j ($j = 1, \dots, n$) are scalars which capture, respectively, the effect of previous shocks and previous dynamic correlation on the current conditional correlation.

The parameters of the above copula-DCC-GARCH model are assessed using an inference function for margins (IFM) approach². Calculations were made in the R package („rmgarch”, version 1.2–6) developed by Alexios Ghalanos.

The states of the precious metals market are identified on the basis of conditional correlation matrices. It is assumed that a given market state corresponds to a typical pattern of the conditional dependence structure described by a conditional correlation matrix R_t . Transition points between market states, corresponding to drastic changes in the conditional dependence structure, are identified

¹ The paper presents the results of the first stage of research, in which a relatively simple approach for investigating dependencies among precious metals was used. In this approach conditional correlation matrices modelled with the use of DCC model are applied in a natural way as parameters of dynamic elliptical copulas (it seems a natural extension of the 2-stage DCC model). During the next stage of the research, the authors use more complicated dependence structures (e.g. hierarchical Archimedean copulas, Vine copulas). The results obtained will be presented in the next paper.

² This method is described in detail in (Joe 1997, pp. 299–307; Doman 2011, pp. 35–37, and Wanat 2012, pp. 98–99).

using Ward's method of cluster analysis and a similarity measure suggested by M. C. Münnix *et al.* (2012), which allows us to quantify the difference of the correlation structure for two points in time.

3. Data and Empirical Results

The data used in this study consist of the daily (five working days per week) spot prices of gold (Gold), silver (Silv), platinum (Plat) and palladium (Pall) from September 22, 1997 to February 13, 2014 (see Fig. 1). The source of data is Bloomberg, and all prices of precious metals are measured in US dollars per troy ounce. As is traditionally done, price return series are computed on a continuous compounding basis as $r_{i,t} = 100 \times (\log(P_{i,t}/P_{i,t-1}))$, where $P_{i,t}$ and $P_{i,t-1}$ are current and one-period lagged spot prices of precious metals. After eliminating the mismatching transaction days, we end up with 4185 log-returns for each series (see Fig. 2).

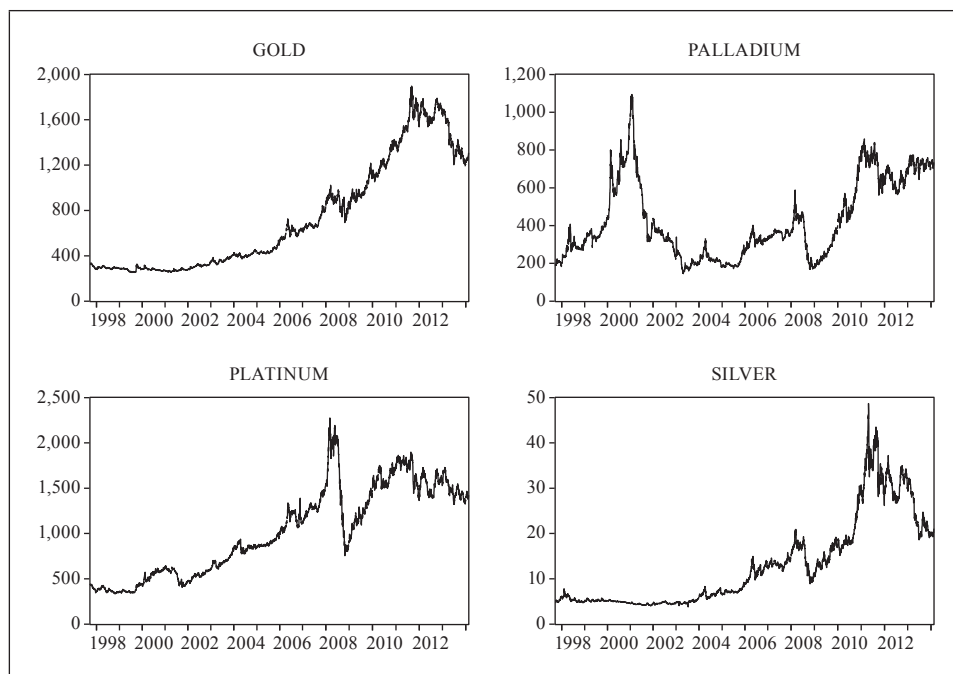


Fig. 1. Price Series of Major Precious Metals between September 1997 and February 2014
Source: the authors' own calculations.

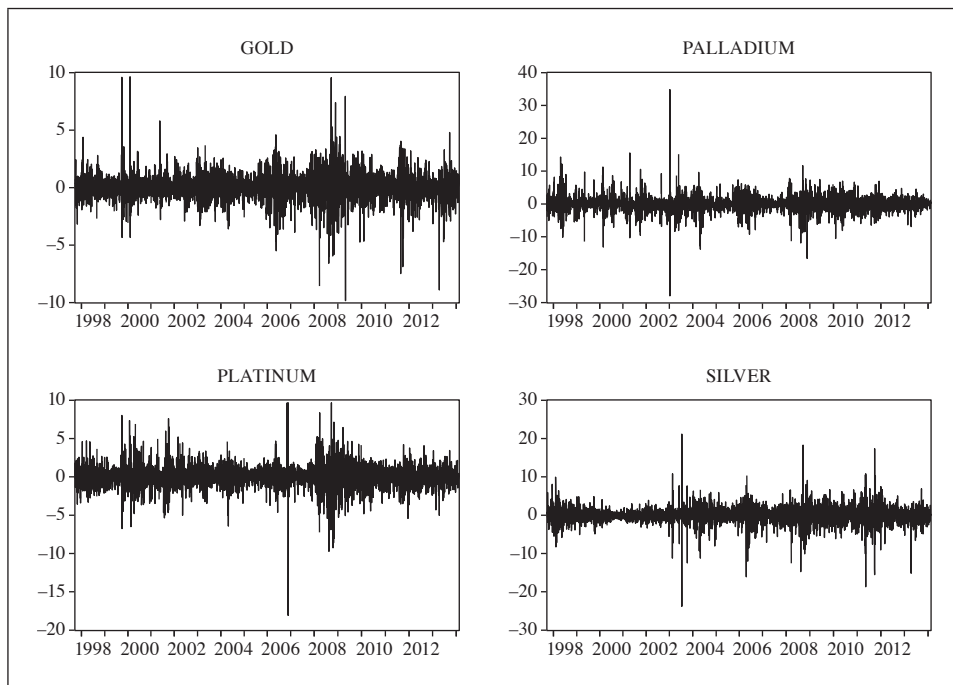


Fig. 2. Returns on Major Precious Metals between September 1997 and February 2014
 Source: the authors' own calculations.

The descriptive statistics for the metals' price levels in U.S. dollar and the returns are reported (in level form) in Tables 1a and 1b, respectively.

Table 1a. Descriptive Statistics for Levels

Specification	Gold	Palladium	Platinum	Silver
Mean	730.39	425.16	1021.36	13.02
Median	520.75	354.50	929.00	8.83
Max	1896.50	1094.00	2276.00	48.70
Min	252.90	144.00	335.00	3.78
Std. Dev.	485.76	205.61	489.60	9.80
Skewness	0.79	0.71	0.24	1.16
Kurtosis	2.22	2.38	1.81	3.34

Source: the authors' own calculations.

Table 1b. Descriptive Statistics for Returns

Specification	Gold	Palladium	Platinum	Silver
Mean	0.03323	0.03129	0.02779	0.03486
Median	0.02535	0.00000	0.00000	0.04999
Max	9.64163	34.83067	9.67362	21.14351
Min	-9.84051	-27.98695	-18.08837	-23.78497
Std. Dev.	1.18972	2.37340	1.50888	2.20188
Skewness	-0.10254	0.25457	-0.40458	-0.60756
Kurtosis	11.66950	22.93386	12.87393	16.53494

Source: the authors' own calculations.

The statistics for the metals' returns generally follow those for their prices. The return on palladium historically has the highest volatility followed by silver, while gold returns are the least volatile of the four metals. In terms of historical return means, silver has the highest average return, followed by gold and palladium, while platinum has the lowest averages.

Table 2. Copula-DCC-GARCH Parameters for Log-returns

Parameter		Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
Gold	μ_0	0.029086	0.012316	2.361737	0.018190
	φ_1	-0.049451	0.015856	-3.118691	0.001817
	ω	0.020068	0.005796	3.462679	0.000535
	α_1	0.073493	0.012870	5.710575	0.000000
	β_1	0.914029	0.014309	63.878167	0.000000
	ν	4.830476	0.386835	12.487167	0.000000
Silver	μ_0	-0.002054	0.026160	-0.078522	0.937413
	φ_1	-0.084966	0.023533	-3.610577	0.000306
	ω	0.014193	0.007579	1.872632	0.061119
	α_1	0.042194	0.003504	12.041960	0.000000
	β_1	0.956806	0.003013	317.543829	0.000000
Platinum	μ_0	0.046781	0.017618	2.655337	0.007923
	φ_1	-0.524437	0.127566	-4.111113	0.000039
	θ_1	0.541134	0.124888	4.332960	0.000015
	ω	0.055136	0.020305	2.715404	0.006620
	α_1	0.112217	0.023435	4.788354	0.000002
	β_1	0.866600	0.029305	29.571831	0.000000

Table 2 cnt'd

Parameter		Estimate	Std. Error	<i>t</i> value	Pr(> <i>t</i>)
	ξ	0.993258	0.020038	49.569488	0.000000
	ν	5.425853	0.443948	12.221817	0.000000
Palladium	μ_0	0.038276	0.023363	1.638314	0.101356
	φ_1	0.050001	0.016266	3.073882	0.002113
	ω	0.207753	0.046007	4.515633	0.000006
	α_1	0.212891	0.027570	7.721894	0.000000
	β_1	0.784233	0.024263	32.322346	0.000000
	ν	3.900838	0.259408	15.037464	0.000000
Joint (DCC)	c_1	0.021455	0.002566	8.360567	0.000000
	d_1	0.973780	0.003508	277.586697	0.000000
	η	29.502754	3.478219	8.482143	0.000000

Source: the authors' own calculations.

In the empirical study, different variants of the ARMA-GARCH specification are considered for individual returns. Eventually, on the basis of information criteria, Student's *t* (with shape parameter ν) AR(1)-GARCH(1,1) model was assumed for gold; the normal AR(1)-GARCH(1,1) model for silver; skewed Student's *t* (with skew and shape parameters ξ and ν respectively) ARMA(1,1)-GARCH(1,1) model for platinum; and Student's *t* (with shape parameter ν) AR(1)-GARCH(1,1) model was assumed for palladium. On the other hand, Gauss and Student's *t* copulas were considered in the analysis of the dynamics of dependencies between the rates of return, and, also on the basis of information criteria, Student's *t* with conditional correlation and constant shape parameter η was chosen³.

Conditional correlation matrices obtained with the use of the estimated model were applied to analyse the precious metals market. Dynamic correlations in this market are presented in Fig. 3. Fig. 4 shows the temporal evolution of the market states in the period from September 22, 1977 to February 13, 2014, obtained as a result of clustering conditional correlation matrices with Ward's method of cluster analysis. The left panel illustrates the division into two clusters (Rousseeuw's Silhouette internal cluster quality index equals 0.5512), while the right panel illustrates the division into three clusters (Rousseeuw's Silhouette internal cluster quality index equals 0.3169). Structural changes in the precious metals markets in the analysed period are identified with the use of a similarity measure of correlation matrices (Münnix *et al.* 2012) and presented in Fig. 5 (the left panel

³ The results can be obtained from the author on request.

illustrates the similarity of matrices distant from each other by a multiple of one quarter, while the right panel shows a multiple of one year). Light shading denotes similar conditional correlation matrices and dark shading denotes dissimilar ones. If we assume that a point on the diagonal designates “now”, then the similarity to previous times from this point can be found on the vertical line below this point, or the horizontal line to the left of it.

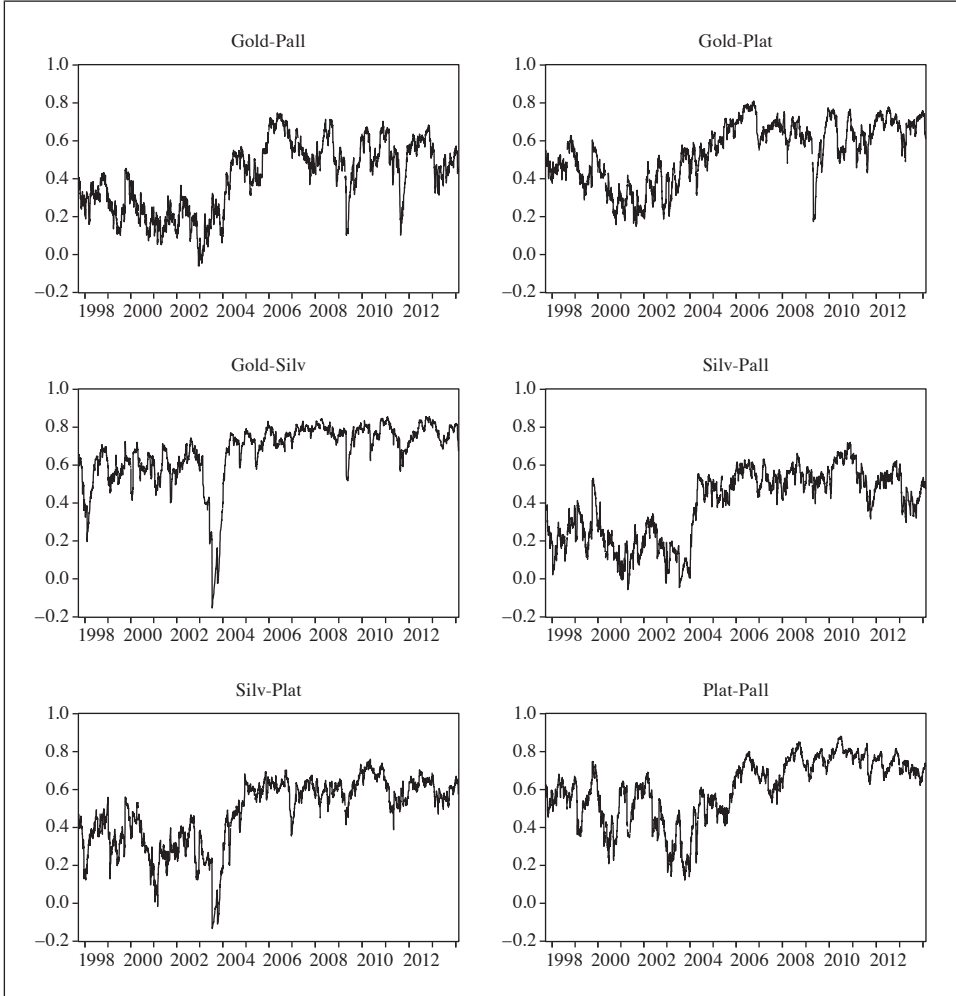


Fig. 3. Dynamic Correlations of Precious Metal Returns

Source: the authors' own calculations.

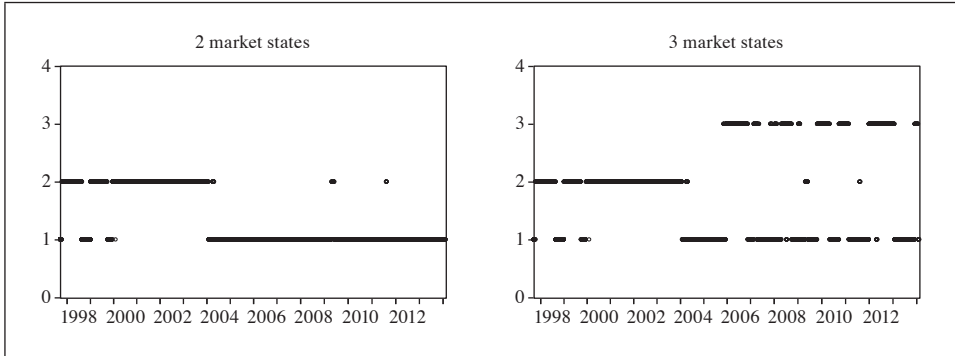


Fig. 4. Temporal Evolution of the Market State

Source: the authors' own calculation.

After analysing the dynamics of conditional correlation matrices (Fig. 3), it can be said that bilateral correlation between precious metals markets increased considerably in 2004 and has remained at this level since then. A similar conclusion can be drawn from the analysis of similarity maps showing conditional correlation matrices (Fig. 5). Particular areas in the matrix show how similar dependence measures in two periods are: the first one is on the horizontal axis and the second one on the vertical axis. Fig. 5 presents the results for two options: the first option covers correlations calculated for sub-periods with 70 observations, and the second for sub-periods with 250 observations. The low value of the similarity measure of correlation matrices (considerably darker shading) for 2004 together with its rise and the maintenance of this high level (lighter shading) indicate structural changes in precious metals markets in 2004. This confirms A. Sensoy's (2013) hypothesis that precious metals will be a single asset class in the near future. This change in the precious metals markets in 2004 is also evident in clustering results (Fig. 4). Divisions into two and three clusters indicate a stable change of the market state in April 29, 2004. For the last decade this market has not returned (with few exceptions) to the state it enjoyed before April 29, 2004. The more detailed analysis of this decade (the division into 3 clusters) reveals two basis states with numerous transition points between them. On the basis of the results obtained, it can be concluded that the global financial crisis from 2008 has not considerably affected the precious metals market.

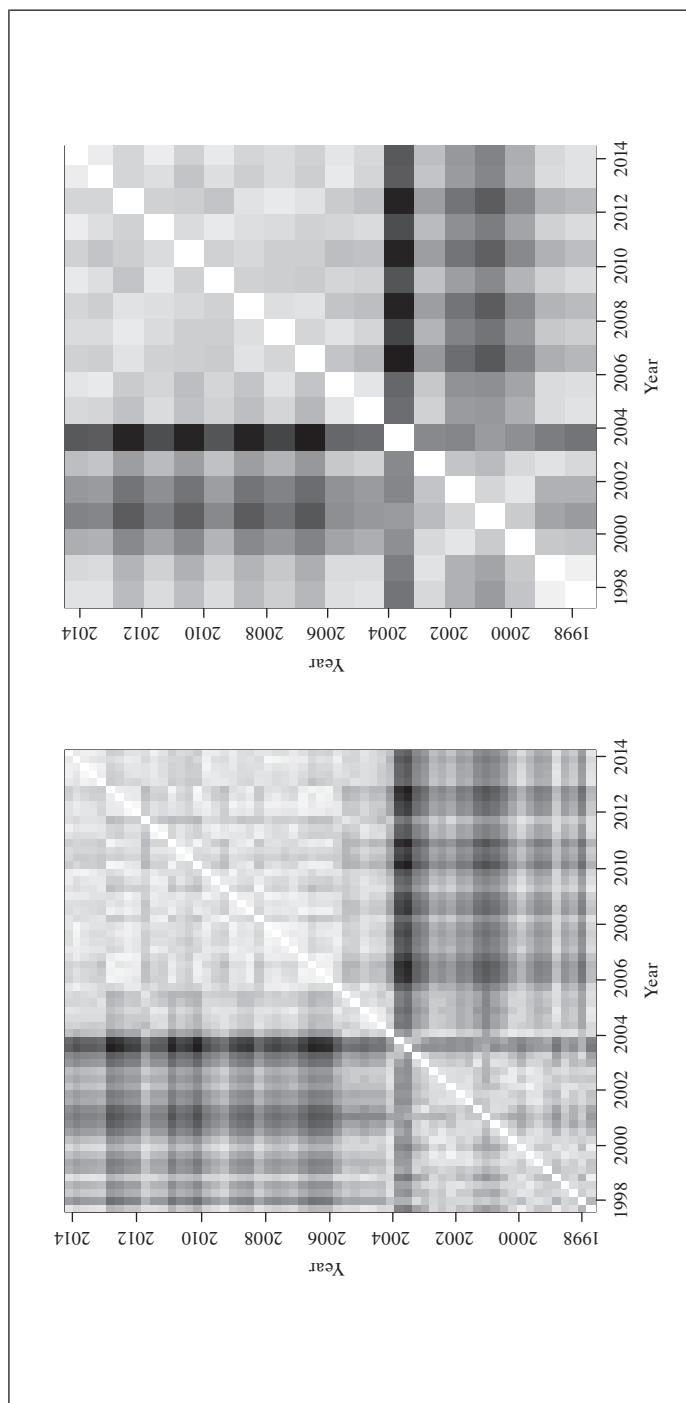


Fig. 5. Correlation/Similarity Matrix for the Precious Metals Market

Source: the authors' own calculations.

4. Conclusion

The objective of this study was to analyse the conditional dependence structure between precious metals using copula-DCC-GARCH methodology and to follow the metals' temporal evolution. The results obtained in the study reveal that the dependence structure is not stable over time. Internal clustering criteria applied to Ward's method prove that two (which seems to be the better choice) or three typical patterns of the conditional dependence are plausible. If two market states are assumed, the transition point takes place in April 2004. The state of the precious metals market before and after this moment is stable, with rare and transitory changes. Conditional correlations in the first period are lower than in the second period. If three market states are assumed, the one that ran until April 2004 is stable, but two patterns that changed frequently were later observed. The similarity between these two last states are, however, quite high. Summing up, the results obtained indicate that the dependence structure of precious metals undergoes only one drastic structural change, in April 2004. This confirms A. Sensoy's (2013) hypothesis that precious metals will be a single asset class in the near future. A unique opportunity to test this thesis was the global financial crisis, which, however, did not affect the correlation structure of returns on precious metals. The results obtained might be of great importance to investors, as they demonstrate that drastic changes of the correlation structure of the precious metals market is currently highly unlikely.

Bibliography

- Aloui R., Ben Aïssa M. S., Nguyen D. K. (2013), *Conditional Dependence Structure between Oil Prices and Exchange Rates: A Copula-GARCH Approach*, "Journal of International Money and Finance", vol. 32: 719–738.
- Ciner C. (2001), *On the Long-run Relationship between Gold and Silver Prices: A Note*, "Global Finance Journal", vol. 12: 299–303, [http://dx.doi.org/10.1016/S1044-0283\(01\)00034-5](http://dx.doi.org/10.1016/S1044-0283(01)00034-5).
- Cochran S. J., Mansur I., Odusami B. (2012), *Volatility Persistence in Metal Returns: A FIGARCH Approach*, "Journal of Economics and Business", vol. 64: 287–305.
- Doman R. (2011), *Zastosowanie kopuli w modelowaniu dynamiki zależności na rynkach finansowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań.
- Engle R. (2002), *Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models*, "Journal of Business & Economic Statistics", vol. 20: 339–350.
- Hammoudeh S., Yuan Y. (2008), *Metal Volatility in Presence of Oil and Interest Rate Shocks*, "Energy Economics", vol. 30: 606–620, <http://dx.doi.org/10.1016/j.eneco.2007.09.004>.

- Hammoudeh S., Yuan Y., McAleer M., Thompson M.A. (2010), *Precious Metals-exchange Rate Volatility Transmissions and Hedging Strategies*, "International Review of Economics & Finance", vol. 19: 633–647.
- Joe H. (1997), *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman-Hall, London.
- Lee T.-H., Long X. (2009), *Copula-based Multivariate GARCH Model with Uncorrelated Dependent Errors*, "Journal of Econometrics", vol. 150: 207–218, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jeconom.2008.12.008>.
- Li M., Yang L. (2013), *Modeling the Volatility of Futures Return in Rubber and Oil – A Copula-based GARCH Model Approach*, "Economic Modelling", vol. 35: 576–581.
- Lucey B. M. and Tully E. (2006), *The Evolving Relationship between Gold and Silver 1978–2002: Evidence from a Dynamic Cointegration Analysis: A Note*, "Applied Financial Economics Letters", vol. 2: 47–53.
- Morales L., Andreosso-O'Callaghan B. (2011), *Comparative Analysis on the Effects of the Asian and Global Financial Crises on Precious Metal Markets*, "Research in International Business and Finance", vol. 25: 203–227.
- Münnix M. C., Shimada T., Schäfer R., Leyvraz F., Seligman T. H., Guhr T., Stanley H. E. (2012), *Identifying States of a Financial Market*, "Scientific Reports", vol. 2, <http://dx.doi.org/10.1038/srep00644>.
- Nelsen R. B. (1999), *An Introduction to Copulas*, Springer-Verlag, New York.
- Papież M., Śmiech S. (2012), *Causality in Mean and Variance Between Returns of Crude Oil and Metal Prices, Agricultural Prices and Financial Market Prices* (in:) J. Ramík, D. Stavárek (eds), *Proceedings of 30th International Conference Mathematical Methods in Economics*, Silesian University, School of Business Administration, Karviná: 675–680.
- Patton A. J. (2006), *Modelling Asymmetric Exchange Rate*, "International Economic Review", vol. 47: 527–556.
- Patton A. J. (2012), *A Review of Copula Models for Economic Time Series*, "Journal of Multivariate Analysis", vol. 110: 4–18, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmva.2012.02.021>.
- Philippas D., Siriopoulos C. (2013), *Putting the "C" into Crisis: Contagion, Correlations and Copulas on EMU Bond Markets*, "Journal of International Financial Markets, Institutions and Money", vol. 27: 161–176.
- Reboredo J. C. (2013a), *Is Gold a Hedge or Safe Haven Against Oil Price Movements?* "Resources Policy", vol. 38: 130–137.
- Reboredo J. C. (2013b), *Is Gold a Safe Haven or a Hedge for the US Dollar? Implications for Risk Management*, "Journal of Banking and Finance", vol. 37: 2665–2676.
- Sari R., Hammoudeh S., Ewing B. T. (2007), *Dynamic Relationships between Oil and Metal Commodity Futures Prices*, "Geopolitics of Energy", vol. 29: 2–13.
- Sari R., Hammoudeh S., Soytas U. (2010), *Dynamics of Oil Price, Precious Metal Prices, and Exchange Rate*, "Energy Economics", vol. 32: 351–362, <http://dx.doi.org/10.1016/j.eneco.2009.08.010>.
- Sensoy A. (2013), *Dynamic Relationship between Precious Metals*, "Resources Policy", vol. 38: 504–511, <http://dx.doi.org/10.1016/j.resourpol.2013.08.004>.
- Serban M., Brockwell A., Lehoczky J., Srivastava S. (2007), *Modelling the Dynamic Dependence Structure in Multivariate Financial Time Series*, "Journal of Time Series Analysis", vol. 28: 763–782, <http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-9892.2007.00543.x>.

- Silvennoinen A., Thorp S. (2013), *Financialization, Crisis and Commodity Correlation Dynamics*, "Journal of International Financial Markets, Institutions and Money", vol. 24: 42–65.
- Śmiech S., Papież M. (2012), *A Dynamic Analysis of Causality between Prices on the Metals Market* (in:) M. Reiff (ed.), *Proceedings of the International Conference Quantitative Methods in Economics (Multiple Criteria Decision Making XVI)*, Bratislava: 221–225.
- Wanat S. (2012), *Modele zależności w agregacji ryzyka ubezpieczyciela*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Kraków.
- Wu C. C., Chung H., Chang Y. H. (2012), *The Economic Value of Co-movement between Oil Price and Exchange Rate using Copula-based GARCH Models*, "Energy Economics", vol. 34: 270–282, <http://dx.doi.org/10.1016/j.eneco.2011.07.007>.
- Zolotko M., Okhrin O. (2014), *Modelling the General Dependence between Commodity Forward Curves*, "Energy Economics", vol. 43: 284–296, <http://dx.doi.org/10.1016/j.eneco.2014.02.019>.

Modelowanie warunkowej zależności między metalami szlachetnymi z wykorzystaniem modeli copula-GARCH

(Streszczenie)

W pracy analizowano warunkową strukturę zależności na rynku metali szlachetnych z wykorzystaniem modeli copula-DCC-GARCH. Na podstawie warunkowych macierzy korelacji rozpoznano stany rynku metali szlachetnych. W tym celu przyjęto, że określonemu stanowi rynku odpowiada typowy wzór warunkowej struktury zależności. Momenty przejścia pomiędzy poszczególnymi stanami odpowiadające nagłym (drastycznym) zmianom w warunkowej strukturze zależności zidentyfikowano, wykorzystując metody grupowania. Zastosowanie opisanej metodologii pozwoliło w okresie od 1997 r. do 2013 r. wyodrębnić trzy stany rynku czterech metali szlachetnych (złoto, srebro, platyna, pallad). Badania wskazały także na znaczny wzrost zależności między rozważanymi metalami na przełomie kwietnia i maja 2004 r.

Słowa kluczowe: metale szlachetne, struktura zależności, copula-GARCH, stany rynku.

Maria Jadamus-Hacura

Krystyna Melich-Iwanek

Katedra Ekonometrii

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Elastyczność polskiego rynku pracy – analiza dynamiczna

Streszczenie

W artykule skupiono się na badaniu elastyczności polskiego rynku pracy w latach 2002–2012. Na wstępie omówione zostały pojęcie i rola deregulacji rynku pracy we współczesnej gospodarce. Przedmiotem zainteresowania było zbadanie skali oraz dynamiki elastyczności polskiego rynku pracy, którą opisywano za pomocą 10 wskaźników cząstkowych. Badanie przeprowadzono za pomocą trzech miar syntetycznych i porównywano zmiany ich wartości w czasie.

Słowa kluczowe: rynek pracy, elastyczność rynku pracy, zmienna syntetyczna, syntetyczne miary rozwoju.

1. Wprowadzenie

Jednym z głównych problemów współczesnych rynków pracy, nabierających szczególnego znaczenia w okresach spowolnienia bądź kryzysu gospodarczego, jest kwestia stopnia jego elastyczności. Zmieniająca się struktura produkcji, postęp techniczny, komputeryzacja i powszechność szeroko rozumianych technologii informatycznych, globalizacja, problemy społeczne itp. wymagają, a często i wymuszają wprowadzanie zmian w sposobie funkcjonowania i regulowania rynku pracy. Do działań ukierunkowanych na poprawę funkcjonowania tych rynków w rozwiniętych współczesnych gospodarkach należy między innymi częściowe ich deregulowanie. Skala owych deregulacji jest różna w poszczegól-

nych krajach i zależy między innymi od ogólnej kondycji gospodarki, polityki społecznej, sytuacji i instytucji działających na rynku pracy, prawa pracy czy wreszcie szeroko rozumianej tradycji.

Przedmiotem artykułu jest zbadanie skali elastyczności polskiego rynku pracy oraz odpowiedź na pytanie, czy zmiany warunków gospodarowania, szczególnie w okresie spowolnienia wzrostu gospodarczego, znalazły odzwierciedlenie w postaci zmian w zasadach funkcjonowania rynku pracy. Badaniem objęto polski rynek pracy w latach 2002–2012.

2. Elastyczność rynku pracy

W sposób najbardziej ogólny elastyczność rynku można określić jako łatwość adaptowania się uczestników rynku pracy do zmieniających się warunków zewnętrznych i wewnętrznych. Na elastycznym rynku pracy pracownicy nie mają trudności ze znalezieniem nowej pracy, a pracodawcy ze zwalnianiem zbędnych pracowników lub z przyjmowaniem nowych. Przeciwnieństwem rynku elastycznego jest rynek sztywny, na którym zmiana pracy jest bardzo utrudniona.

Stopień elastyczności rynku pracy, będącej skutkiem procesu jego deregulacji jest zależny przede wszystkim od przyjętych rozwiązań instytucjonalnych, polityki gospodarczej, struktury rynku pracy oraz kwalifikacji pracowników. Na elastycznym rynku obserwuje się zmiany charakteryzujące się „zwiększaniem swobody podmiotów gospodarczych i mniejszą ingerencją państwa w dziedzinie zbiorowych stosunków pracy” [*Elastyczność polskiego rynku pracy* 2004, s. 7]. Zmiany te dotyczą między innymi: systemu zabezpieczenia społecznego, regulacji w zakresie płacy minimalnej, ustawodawstwa dotyczącego ochrony stosunku pracy, uprawnień związków zawodowych.

W literaturze ekonomicznej wymienia się następujące elementy rynku pracy, które można określić jako elastyczności cząstkowe odnoszące się do: zatrudnienia, czasu pracy, płac, podaży pracy.

Elastyczność zatrudnienia, nazywana również numeryczną, oznacza zdolność przystosowywania się liczby zatrudnionych do zmieniających się warunków ekonomicznych. W tym aspekcie elastyczność oznacza nietypowe formy zatrudnienia między innymi takie, jak: kontrakty dotyczące konkretnego zadania, zatrudnienie na czas określony czy w niepełnym wymiarze czasu pracy, praca dorywcza lub na wezwanie, praca w domu, telepraca, dzielenie się pracą itp. [Kwiatkowski 2003, s. 20; Skórska 2007, s. 141]¹. Ponadto ten rodzaj elastyczności rynku pracy zależy od roli zysku w przedsiębiorstwie, stopnia ochrony stosunku pracy, kosztów przyjęć do pracy oraz zwolnień z pracy [Skórska 2007].

¹ Problemom tym poświęcona jest m.in. praca: [Sobočka-Szczapa 2003].

Elastyczność czasu pracy polega na różnorodnych sposobach odchodzenia od standardowego czasu pracy, tj. w pełnym wymiarze, równomiernie rozłożonego w tygodniu, jednolitej liczby godzin pracy w ciągu dnia itd. Ta forma elastyczności rynku pracy to m.in.: praca w niepełnym wymiarze czasu pracy, ruchomy, indywidualny czas pracy w ciągu dnia, tygodnia, zmienny wymiar tygodniowego czasu pracy w zakładzie oraz uelastycznienie rocznego i realizowanego w ciągu całego życia zawodowego czasu pracy (w tym przypadku np. wcześniejsze przechodzenie na emeryturę) [Kwiatkowski 2003, s. 20; Skórska 2007, s. 137]. Elastyczny czas pracy powinien chronić pracowników przed zwolnieniami w okresach pogarszającej się koniunktury, umożliwiać zatrudnienie większej liczbie pracowników (wolumen pracy dzielony jest na większą liczbę osób) oraz pozwolić na podjęcie pracy tym spośród bezrobotnych, którzy nie są zainteresowani pracą według standardowego czasu pracy.

Elastyczność płac polega na ich wrażliwości na zmieniające się warunki na rynku pracy, zmiany rentowności przedsiębiorstwa i wydajności pracy. Giętkość lub sztywność płac zależy m.in. od: siły związków zawodowych (zainteresowanych raczej sztywnością płac), szczepła negocjowania i zawierania układów zbiorowych, strategii płacowych przedsiębiorstw oraz zakresu ingerencji państwa w kształtowanie płac, szczególnie płacy minimalnej [Kwiatkowski 2004, s. 21].

Elastyczność rynku pracy należy do tzw. zjawisk wielocechowych, zależy od wielu różnych czynników i przejawia się w wielu formach. Szczególne znaczenie ma jednak jej wyraz instytucjonalny. Do instytucjonalnych czynników wpływających na sytuację na rynku pracy należą [Góra 2003, *Elastyczność polskiego rynku pracy* 2004, s. 130–131]: ochrona zatrudnienia, opodatkowanie pracy, wysokość i okres, na który przyznawane są zasiłki dla bezrobotnych, siła przetargowa związków zawodowych, centralizacja/decentralizacja negocjacji płacowych.

Komentarza wymaga kwestia opodatkowania kosztów pracy. W praktyce występuje tzw. klin podatkowy rozumiany jako procentowy udział różnicy między całkowitym kosztem pracy a wynagrodzeniem netto pracownika w całkowitych kosztach pracy. Na klin podatkowy składają się m.in.: podatki pośrednie i bezpośrednie oraz paropodatki, wśród których istotną rolę odgrywają składki na ubezpieczenia społeczne [Góra 2003, s. 10; Ertman 2011]. Jest to jeden z czynników powodujących zakłócenia równowagi na rynku pracy, zwiększa bowiem koszty pracy dla pracodawców oraz zmniejsza wynagrodzenia dla pracowników. Skutkiem klina podatkowego jest ograniczenie zarówno podaży, jak i popytu na pracę, a to zwiększa bezrobocie, a także szarą strefę [Bartosik 2012, s. 35].

Kolejnym istotnym czynnikiem oddziałującym na elastyczność rynku pracy jest poziom tzw. stopy kompensacji, czyli stosunku wysokości zasiłków dla bezrobotnych do wynagrodzeń za pracę. Zbyt wysoka stopa kompensacji demobilizuje bezrobotnych do poszukiwania pracy. Ze względu na elastyczność rynku pracy

zarówno klin podatkowy jak i stopa kompensacji powinny być stosunkowo niskie [Giegiel 2007, s. 13].

Rozważając determinanty rynku pracy, nie można pominąć roli związków zawodowych. Szczególnie dotyczy to stopnia uzwiązkowienia pracowników, ponieważ w warunkach silnej pozycji przetargowej związków zawodowych obserwuje się np. usztywnienie płac, zmniejszenie ich zróżnicowania, wzrost kosztów pracy itp.

Z rozważań teoretycznych i wyników badań empirycznych publikowanych w literaturze ekonomicznej wynika, że we współczesnych gospodarkach obserwuje się zmniejszające znaczenie związków zawodowych oraz zbiorowego prawa pracy na rzecz wzrostu znaczenia indywidualnego prawa pracy. Procesy te są zróżnicowane, zależne między innymi od stopnia integracji poszczególnych krajowych rynków z rynkiem światowym, od warunków lokalnych i tradycji ekonomicznych. Można zatem już mówić o ogólnej tendencji zmian w sposobie funkcjonowania współczesnych gospodarek.

3. Założenia analizy elastyczności polskiego rynku pracy

Kwestia elastyczności rynku pracy jest traktowana w literaturze jako jeden z najważniejszych problemów współczesnych gospodarek, w tym także polskiej. Na ostateczny wyraz elastyczności rynku pracy składa się wiele czynników i dlatego w celu badania tego problemu wykorzystano koncepcję analizy wielowymiarowej zaproponowaną przez A. Ertman [2011, s. 51–53]. W przywołanej pracy przedstawione zostały wyniki badania porównawczego elastyczności rynku pracy w wybranych krajach europejskich oraz w USA przeprowadzonego między innymi za pomocą metody TOPSIS (*Technique for Order Preference by Similarity to an Ideal Solution*) należącej do grupy porządkowania liniowego obiektów wielocechowych. Metoda ta jest pewnym rozwinięciem koncepcji obliczania taksonomicznej miary rozwoju Z. Hellwiga i dlatego równolegle przeprowadzono badania za pomocą tej procedury. Badanie przeprowadzono na podstawie danych pochodzących z lat 2002–2012.

Na procedurę obliczeniową TOPSIS składają się następujące etapy:

– wybór (merytoryczny i formalny) indykatorów elastyczności rynku pracy. Wartości tych wskaźników, tworzą macierz o wymiarach $(m \times n)$:

$$X = [x_{it}], \quad (1)$$

gdzie: x_{it} – wartość i -tego ($i = 1, 2, \dots, m$) wskaźnika elastyczności rynku pracy w roku t , $t = 1, 2, \dots, n$;

- normalizacja wartości wybranych cech;
- dla stymulant

$$z_{it} = \frac{x_{it} - \min_t x_{it}}{\max_t x_{it} - \min_t x_{it}}; \quad (2)$$

– dla destymulant

$$z_{it} = \frac{\max_t x_{it} - x_{it}}{\max_t x_{it} - \min_t x_{it}}; \quad (3)$$

– obliczanie odległości euklidesowych elastyczności w roku t od wzorca $Z^+ = (1, 1, \dots, 1)$ oraz od antywzorca rozwoju, $Z^- = (0, 0, \dots, 0)$ według wzorów:

$$d_t^+ = \sqrt{\sum_{i=1}^m (z_{it} - z_i^+)^2}; \quad (4)$$

$$d_t^- = \sqrt{\sum_{i=1}^m (z_{it} - z_i^-)^2}; \quad (5)$$

– wyznaczenie syntetycznego miernika elastyczności rynku pracy według wzoru:

$$m_t = \frac{d_t^-}{d_t^- + d_t^+}. \quad (6)$$

Wartości miernika syntetycznego $m_t \in [0; 1]$, wysokie wartości tego miernika świadczą o wysokiej elastyczności rynku pracy. Obserwacja wartości m_t w czasie pozwala na ocenę zmian elastyczności rynku pracy w badanym okresie.

W celu wyznaczenia wartości taksonomicznej miary rozwoju Z. Hellwiga normalizację poszczególnych indyktorów elastyczności rynku pracy X_{it} przeprowadza się, standaryzując ich wartości. Wzorcem rozwoju jest zbiór maksymalnych wartości stymulant oraz minimalnych wartości destymulant. Antywzorzec tworzą wartości przeciwne – minimalne stymulant i maksymalne destymulant.

Miara rozwoju Hellwiga dana jest wzorem:

$$m_{tH} = 1 - \frac{d_t^+}{d_0}, \quad (7)$$

gdzie:

d_t^+ – odległość badanego zjawiska od wzorca rozwoju w roku t ,

$$d_0 = \bar{d} + 2s_0, \quad \bar{d} = \sum_{t=1}^n d_t^+, \quad s_0 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (d_t^+ - \bar{d})^2.$$

Wartości syntetycznej miary rozwoju $m_{tH} \in [0; 1]$, wysokie wartości tego miernika świadczą o wysokiej elastyczności rynku pracy.

Jednym z celów prezentowanego badania było poznanie zmian w skali elastyczności polskiego rynku w czasie. Badanie dynamiki obiektów wielocechowych można przeprowadzić za pomocą wielu metod (por. np. [Melich 1994]). W tym przypadku wybrano prostą metodę syntetycznej miary dynamiki, nawiązującą do dwóch poprzednio przedstawionych.

Obliczanie wartości syntetycznej miary dynamiki wymaga na wstępie: standaryzacji wskaźników elastyczności oraz przekształcenia destymulant w stymulanty.

Następnie konstruuje się dynamiczny wzorzec rozwoju składający się z wartości stymulant z okresu pierwszego, czyli:

$$Z_1 = (Z_{11}, Z_{21}, \dots, Z_{i1}, \dots, Z_{m1}), \quad (8)$$

gdzie: Z_{i1} – wartość i -tego wskaźnika elastyczności (stymulanty) w pierwszym z analizowanych okresów $i = 1, 2, \dots, n$.

Syntetyczna miara dynamiki została skonstruowana z wykorzystaniem reguły indeksu o podstawie stałej, z okresu pierwszego, i obliczana jest jako odległość euklidesowa od wzorca Z_1 dla każdego okresu objętego badaniem, czyli:

$$m_{iD} = d_t^1 = \sqrt{\sum_{i=1}^m (z_{it} - z_{i1})^2}, \quad (9)$$

gdzie: d_t^1 – odległość zestandaryzowanych wartości wskaźników elastyczności w okresie t od wartości z okresu pierwszego (wzorca dynamicznego).

Badaniem objęto 10 cech charakteryzujących elastyczność polskiego rynku pracy w latach 2002–2012. Cechy te zostały zaproponowane przez A. Ertman [2011], która badała elastyczność rynków pracy w wybranych krajach europejskich i w USA. Przyjęcie tego samego zestawu zmiennych pozwoliło na porównanie wyników.

Wskaźniki częściowe elastyczności rynku pracy:

X_1 – wskaźnik ochrony zatrudnienia – zatrudnienie tymczasowe (D),

X_2 – wskaźnik ochrony zatrudnienia – zwolnienia grupowe (D),

X_3 – klin podatkowy (D),

X_4 – zasięg związków zawodowych w gospodarce (D),

X_5 – odsetek pracowników, którzy pracują mniej niż zwykle z powodu „martwego sezonu”, przerw w zakładzie lub z powodów technicznych (S),

X_6 – odsetek zatrudnionych z umową na czas określony w zatrudnieniu ogółem (S),

X_7 – bezrobocie długookresowe jako procent ludności aktywnej zawodowo (D),

X_8 – stopa zatrudnienia starszych pracowników w wieku 55–64 lata (S),

X_9 – odsetek zatrudnionych w niepełnym wymiarze czasu pracy w ogólnym zatrudnieniu (S),

X_{10} – stopa zatrudnienia wśród osób w wieku poniżej 25 lat (S),

gdzie:

S – stymulanta,

D – destymulanta².

Wartości pierwszych dwóch wskaźników (ochrony zatrudnienia; X_1 i X_2) charakteryzowały się niewielką zmiennością. W ostatnich latach wzrósł udział zatrudnionych tymczasowo a wskaźnik zwolnień grupowych utrzymuje się na

² Wszystkie wykorzystane w badaniu dane (przeliczone i skorygowane w styczniu 2014 r.) pochodzą z następujących źródeł: http://stats.oecd.org/OECDStat_Metadata, <http://epp.eurostat.ec.europa.eu>.

prawie stałym poziomie. Klin podatkowy w latach 2002–2008 kształtował się na poziomie 38–39%, a następnie wykazywał tendencję spadkową do poziomu 35,5%. W badanym okresie udział związków zawodowych (X_4) w gospodarce wykazywał tendencję wzrostową do 21,5% w 2006 r., a następnie malejącą do 15% w 2012 r. Wartości X_5 (odsetek pracowników sezonowych) wahały się nieregularnie od 0,16% w 2007 r. do 0,38% w 2009 r. Natomiast zmienna X_6 (odsetek zatrudnionych na czas określony w zatrudnieniu ogółem) wykazywała tendencję rosnącą od 15% w 2002 r. do 27% w 2012 r. Udział liczby bezrobotnych długookresowo w populacji osób aktywnych zawodowo (X_7) malał znacząco do 2008 r., a następnie zaobserwowano niewielki wzrost do wartości 4,1% w 2012 r. Udział pracujących w wieku przed i okołiemerytalnym w Polsce (X_8) w latach 2002–2012 wzrastał od 28% do około 39%. Zmienna (X_9) reprezentująca odsetek zatrudnionych w niepełnym wymiarze czasu pracy w ogólnym zatrudnieniu wykazywała niewielki spadek wartości od 10,8% w 2002 r. do 7,9% w 2012 r. Stopa zatrudnienia wśród osób w wieku poniżej 25 lat (X_{10}) średnio kształtowała się na poziomie około 24%, wykazywała wzrost w okresie do 2008 r. do wartości 27,3% i niewielki spadek do poziomu przeciętnego w ostatnim obserwowanym roku.

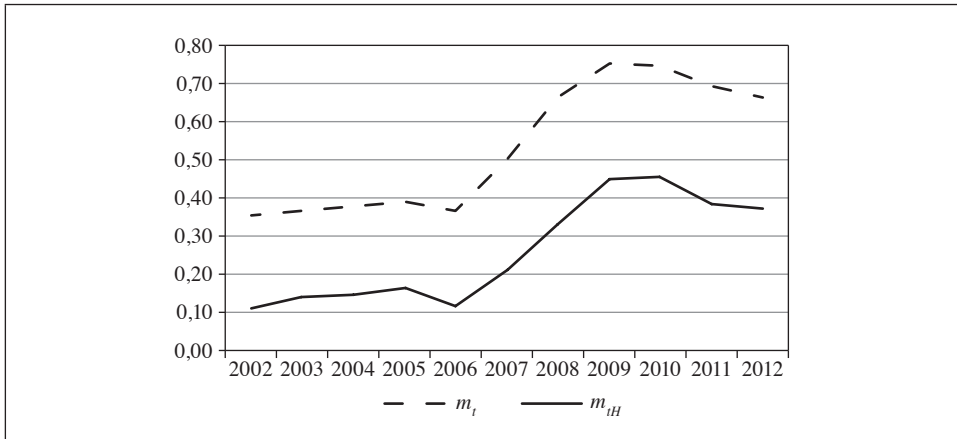
4. Wyniki badania

Wartości wszystkich trzech syntetycznych miar elastyczności zamieszczone zostały w tabeli 1.

Tabela 1. Wartości syntetycznych mierników elastyczności rynku pracy

Rok	m_t	m_{IH}	m_{ID}
2002	0,352	0,108	–
2003	0,365	0,143	2,413
2004	0,376	0,146	3,970
2005	0,387	0,163	4,617
2006	0,365	0,117	5,725
2007	0,501	0,211	6,294
2008	0,664	0,333	6,644
2009	0,754	0,449	6,125
2010	0,748	0,452	6,304
2011	0,691	0,383	6,660
2012	0,666	0,373	6,648

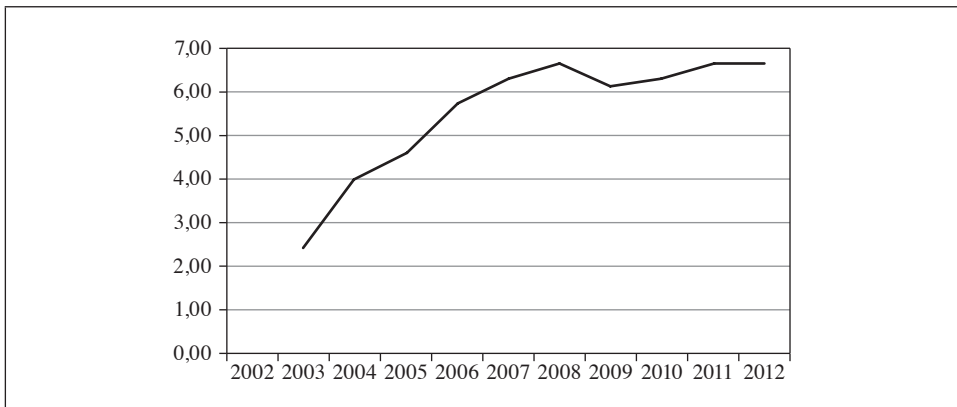
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 1. Wartości miar elastyczności rynku pracy – m_t i m_{iH}

Źródło: opracowanie własne.

Z przeprowadzonych badań wynika, że stopień deregulacji polskiego rynku pracy wzrastał do 2009 r. według miary m_t i do 2010 r. według miary m_{iH} , po czym powoli zaczął maleć. Z kolei według miary m_{iD} maksymalny, w stosunku do poziomu z 2002 r., stopień elastyczności rynku pracy miał miejsce w latach 2008 i 2011.



Rys. 2. Wartości miary m_{iD}

Źródło: opracowanie własne.

Wartości miar m_t i m_{iH} wykazywały jednakowe tendencje zmian, choć wartości drugiej z nich charakteryzowały się większą zmiennością. Również i wartości miary m_{iD} potwierdzają wzrostową tendencję deregulacji rynku pracy

w Polsce. Z danych zamieszczonych w tabeli 1 i na rys. 2 wynika, że jej wartości silnie wzrastały, osiągając wartość maksymalną w 2008 r. podobnie jak wartości poprzednich dwóch miar. Kształtowanie się wartości miar syntetycznie opisujących badane zjawisko ilustrują wykresy zamieszczone na rys. 1 i 2.

Podsumowując uzyskane wyniki, można stwierdzić, że została potwierdzona hipoteza, że polski rynek pracy staje się coraz bardziej elastyczny. W okresie spowolnienia gospodarki w latach 2008–2009 zaobserwowano najwyższy stopień deregulacji rynku pracy (mierzony za pomocą zastosowanych miar), co można traktować jako przejaw działania mechanizmów obronnych działających na tym rynku.

5. Uwagi końcowe

Rozważany problem ma bardzo istotne znaczenie zarówno teoretyczne, jak i praktyczne. Współczesne rynki pracy wymagają pewnego zakresu deregulacji, kwestią dyskusyjną pozostaje nadal jej stopień. Problem wyboru między regulacją a deregulacją rynku pracy jest odwiecznym, jak twierdzi Z. Wiśniewski [2004, s. 294], problemem zarówno teoretyków, jak i praktyków gospodarczych. Wśród ekonomistów od lat trwa dyskusja na temat skali regulacji bądź deregulacji rynku pracy jako elementu ogólnej polityki rynku pracy. Przeciwstawia się europejskie na ogół bardziej regulowane (oprócz Wielkiej Brytanii) rynki, rynkowi Stanów Zjednoczonych, który charakteryzuje się najwyższym stopniem deregulacji wśród krajów OECD i jednocześnie najniższym poziomem bezrobocia [Wiśniewski 2004, s. 295]. Jednym z proponowanych rozwiązań problemu, jak pogodzić czy wręcz zrównoważyć elastyczność z bezpieczeństwem rynku pracy, jest koncepcja *flexicurity*, która zakłada z jednej strony wspieranie elastycznego rynku, a z drugiej zachowanie wysokiego poziomu zabezpieczenia społecznego.

Warto w tym miejscu dodać, że z badań porównawczych A. Ertman [2011] oraz z badań autorek niniejszego opracowania wynika, że polski rynek na tle wybranych rynków europejskich charakteryzuje się przeciętnym poziomem elastyczności oraz że elastyczność ta wykazuje tendencję wzrostową, co zostało potwierdzone wynikami badań.

Podjęty w artykule problem wymaga dalszych szczegółowych analiz, np. dokładnych badań poszczególnych indykatorów elastyczności rynku pracy, czyli elastyczności cząstkowych. Jednym z najważniejszych jest tzw. klin podatkowy, który ma negatywny wpływ na sytuację na rynku pracy. W warunkach polskich w latach 2000–2012 klin podatkowy kształtował się na poziomie 34–39%, a w krajach o wysokiej elastyczności rynku pracy poziom klina podatkowego jest zdecydowanie niższy. Na uwagę w omawianym kontekście zasługują też takie

problemy, jak: pozycja związków zawodowych w gospodarce, umowy na czas określony, zatrudnianie ludzi w wieku emerytalnym.

Literatura

- Bartosik K. [2012], *Popytowe i podażowe uwarunkowania polskiego bezrobocia*, „Gospodarka Narodowa” nr 11–12.
- Elastyczność polskiego rynku pracy* [w:] *Elastyczny rynek pracy w Polsce. Jak sprostać temu wyzwaniu?* [2004], red. M. Boni, Zeszyty BRE Bank – CASE nr 73, CASE-Centrum Analiz Społeczno-Ekonomicznych, Fundacja Naukowa, Warszawa.
- Ertman A. [2011], *Zróżnicowanie elastyczności rynków pracy w wybranych krajach europejskich oraz USA w świetle metody TOPSIS*, *Oeconomia Copernicana*, nr 3.
- Giegiel A. [2007], *Elastyczność rynku pracy a dynamika wzrostu gospodarczego w wybranych krajach OECD* [w:] *Wykorzystanie zasobów pracy we współczesnej gospodarce*, red. D. Kopycińska, Wydawnictwo PRINT GROUP Daniel Krzanowski, Szczecin.
- Góra M. [2003], *Wpływ systemu zabezpieczenia społecznego na rynek pracy*, „*Ekonomista*”, nr 1.
- Kwiatkowski E. [2003], *Elastyczność popytu na pracę w teoriach rynku pracy* [w:] *Elastyczne formy zatrudnienia i organizacji pracy a popyt na pracę w Polsce*, red. E. Kryńska, IPiSS, Warszawa.
- Melich K. [1994], *Kilka uwag na temat dynamicznej analizy obiektywnej jakości życia* [w:] *Ekonometria*, Materiały z XXVIII Konferencji Ekonometrycznej i X Seminarium Naukowego im. Zbigniewa Pałowskiego, Akademia Ekonomiczna w Katowicach, Katowice–Kraków–Wrocław.
- Skórska A. [2007], *Przeciwdziałanie bezrobociu* [w:] *Ekonomia rynku pracy*, red. D. Kotlorz, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice.
- Sobočka-Szczapa H. [2003], *Nietypowe formy zatrudnienia pracowniczego* [w:] *Elastyczne formy zatrudnienia i organizacji pracy a popyt na pracę w Polsce*, red. E. Kryńska, IPiSS, Warszawa.
- Wiśniewski Z. [2004], *Rynki pracy w przyszłości – deregulacja a zatrudnienie* [w:] *Przyszłość pracy w XXI wieku*, red. S. Borkowska, IPiSS, Warszawa.

Elasticity of the Polish Labour Market – a Dynamic Analysis

(Abstract)

The paper looks at the elasticity of the Polish labour market in the years 2002–2012. It first discusses the notion and role of labour market deregulation in the contemporary economy. It goes on to examine the scale and dynamics of the elasticity of the Polish labour market, described with 10 fragmentary indicators. Research was conducted with three synthetic measures and changes in their value in time were compared.

Keywords: labour market, labour market elasticity, synthetic measures, development indices.

Marcin Salamaga

Katedra Statystyki

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Identyfikacja związków przyczynowych pomiędzy bezpośrednimi inwestycjami zagranicznymi i wzorcem handlu zagranicznego w Polsce

Streszczenie

W literaturze przedmiotu można znaleźć badania nad wpływem bezpośrednich inwestycji zagranicznych na zmiany we wzorcu przewag komparatywnych, jak i struktury handlu zagranicznego. Możliwe są także sprzężenia zwrotne, w których ewolucja wzorca przewag komparatywnych czy przeobrażenia gałęziowej struktury handlu zagranicznego oddziałują na napływ bezpośrednich inwestycji zagranicznych. Można więc zadać pytanie, jaką rolę mają poszczególne zmienne w kształtowaniu wzajemnych powiązań, które z tych powiązań są istotne statystycznie i jaki jest kierunek wzajemnego oddziaływania zmiennych. Odpowiedź może ułatwić badanie przyczynowości w sensie Grangera. Celem artykułu jest ustalenie związków przyczynowych pomiędzy bezpośrednimi inwestycjami zagranicznymi i zmiennymi reprezentującymi konkurencyjność polskiego handlu zagranicznego. W badaniach wykorzystano modele wektorowej autoregresji i testy przyczynowości w sensie Grangera.

Słowa kluczowe: bezpośrednie inwestycje zagraniczne, handel zagraniczny, model VAR, model VECM, test przyczynowości Grangera.

1. Wprowadzenie

Istnieją liczne teorie ekonomii, w których bezpośrednim inwestycjom zagranicznym (BIZ) przypisuje się zasadniczą rolę w kształtowaniu rozwoju gospodarczego. W modelu dynamicznych przewag komparatywnych [Ozawa 1992] wzrost dobrobytu następuje pośrednio poprzez oddziaływanie BIZ na eksport i wzorzec ujawnionych przewag komparatywnych. Rozwój gospodarczy w tym ujęciu modelowym ma charakter ewolucyjny i wspierany jest inwestycjami kierowanymi do kolejnych branż: surowcochłonnej, pracochłonnej, kapitałochłonnej i technologicznie intensywnej, przy czym napływowi BIZ towarzyszą odpowiednie zmiany we wzorcu przewag komparatywnych. Można więc wyróżnić przynajmniej cztery stadia rozwoju gospodarczego ściśle związane z charakterem dominujących BIZ (BIZ surowcochłonne – pierwszy etap rozwoju, BIZ pracochłonne – drugi etap, BIZ kapitałochłonne – trzeci etap i BIZ technologicznie intensywne – czwarty najwyższy etap rozwoju) [Ozawa 1992, Salamaga 2013]. W tym ujęciu teoretycznym bezpośrednie inwestycje zagraniczne traktowane są jako determinanta dla przewag komparatywnych i eksportu. Z drugiej strony możliwe są także sprzężenia zwrotne, w których ewolucja wzorca przewag komparatywnych, czy przeobrażenia gałęziowej struktury handlu zagranicznego oddziałują na napływ bezpośrednich inwestycji zagranicznych. Można więc zapytać o rolę poszczególnych zmiennych w kształtowaniu wzajemnych powiązań: które z tych powiązań są istotne statystycznie i jaki jest kierunek wzajemnego oddziaływania zmiennych? Odpowiedź może ułatwić badanie przyczynowości w sensie Grangera. Celem artykułu jest ustalenie związków przyczynowych pomiędzy bezpośrednimi inwestycjami zagranicznymi i zmiennymi reprezentującymi konkurencyjność polskiego handlu zagranicznego. Istotą tego badania jest też określenie kierunku i siły oddziaływania pomiędzy zmiennymi, co powinno ułatwić dobór instrumentów ekonomicznych wspierających handel zagraniczny bądź stymulujących napływ BIZ. Dodatkowo zbadano wzajemne powiązania pomiędzy wskaźnikami ujawnionej przewagi komparatywnej różnych grup towarów, co pozwoli na pełniejszą identyfikację zmian we wzorcu przewag komparatywnych i ocenę poziomu konkurencyjności polskiego handlu zagranicznego. W badaniach wykorzystano modele wektorowej autoregresji i testy przyczynowości w sensie Grangera. W literaturze przedmiotu można znaleźć wyniki badań powiązań pomiędzy BIZ i innymi wskaźnikami makroekonomicznymi z użyciem tej metodologii. Zwykle ograniczały się one do identyfikacji zależności pomiędzy BIZ, PKB, eksportem czy wskaźnikami rynku pracy w gospodarkach różnych krajów [Hastiadi 2011, Jayanthakumaran i Lee 2007, Sultan 2013]. Stosunkowo mniej liczne są publikacje, w których modele wektorowej autoregresji i testy przyczynowości Grangera stosuje się do badania zależności dla polskiej gospodarki [Gurgul i Lach 2009].

Brakuje natomiast opracowań naukowych podejmujących badania dynamicznych zależności pomiędzy komponentami wzorca przewag komparatywnych i BIZ. Niniejszy artykuł w pewnym stopniu może wypełnić tę lukę. Wyniki analizy umożliwią również odniesienie do teorii dynamicznych przewag komparatywnych T. Ozawy, w której główną rolę odgrywają bezpośrednie inwestycje zagraniczne.

2. Metoda badawcza

Badania związków przyczynowych poprzedziło przygotowanie danych w postaci kwartalnych szeregów czasowych wartości bezpośrednich inwestycji zagranicznych (BIZ) w Polsce w mln EUR, polskiego eksportu (Ex) w mln EUR, wskaźników ujawnionej przewagi komparatywnej towarów i wskaźnika pokrycia importu eksportem. W obliczeniach posłużono się danymi z Głównego Urzędu Statystycznego obejmującymi okres od pierwszego kwartału 2002 r. do czwartego kwartału 2012 r.¹ Wskaźniki przewag komparatywnych (*revealed comparative advantage* – RCA) dóbr o różnym nasyceniu czynnikami produkcji obliczono według wzoru [Misala 2011]:

$$RCA_i = \ln\left(\frac{Ex_i}{Im_i} : \frac{Ex}{Im}\right), \quad (1)$$

gdzie:

Ex_i – wartość eksportu i -tej grupy towarowej,

Im_i – wartość importu i -tej grupy towarowej,

Ex – całkowita wartość polskiego eksportu,

Im – całkowita wartość polskiego importu.

Dodatnia wartość miernika (1) wskazuje na występowanie przewagi komparatywnej w i -tej grupie towarowej, natomiast ujemna wartość tego wskaźnika oznacza brak takiej przewagi. Ponadto miernik (1) określa intensywność ujawnionej przewagi komparatywnej: im wyższą wartość przyjmuje, tym wyższy jest poziom tej przewagi. W niniejszych badaniach przewagi komparatywne obliczono dla czterech grup towarów: surowcówłłonnych (RCAs), pracochłonnnych (RCAp), kapitałochłonnnych (RCAk) i technologicznie intensywnych (RCA_t). Przydzielenie towarów do poszczególnych grup przeprowadzono na podstawie Międzynarodowej Standardowej Klasyfikacji Handlu (*Standard International Trade Classification* – SITC) na dwucyfrowym poziomie dezagregacji [Misala i Pluciński 2000].

¹ http://www.stat.gov.pl/gus/wskazniki_makroekon_PLK_HTML.htm (dostęp: 10.03.2014). Ograniczenie się do danych z lat 2002–2013 było uwarunkowane dostępnością kompletnych danych kwartalnych.

W ocenie konkurencyjności eksportu posłużono się również wskaźnikiem pokrycia importu eksportem (*trade coverage* – TC), który definiuje się jako iloraz wartości eksportu do importu. Miernik ten wyraża wewnętrzną przewagę komparatywną kraju. Wartość wskaźnika TC większa od jedności w określonej branży (grupie towarowej) wskazuje na specjalizację kraju w tej branży [Szymanik 2004].

Badanie związków przyczynowych pomiędzy zmienną BIZ i zmiennymi Ex, RCAs, RCap, RCAk, RCAt, TC przeprowadzono za pomocą modeli wektorowej autoregresji (*vector autoregression model* – VAR) oraz wektorowych modeli korekty błędem (*vector error correction model* – VECM).

Standardowa postać modelu VAR jest następująca [Ekonometria współczesna 2007]:

$$X_t = A_0 D_t + \sum_{i=1}^s A_i X_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (2)$$

gdzie:

- X_t – wektor obserwacji bieżących wartości analizowanych procesów,
- D_t – wektor zawierający składniki deterministyczne (np. trend, sezonowość),
- A_0 – macierz parametrów przy składnikach wektora D_t ,
- A_i – macierz autoregresyjnych operatorów poszczególnych procesów,
- ε_t – wektor procesów resztowych,
- s – rząd modelu VAR.

Model VAR stosowano w sytuacji braku kointegracji badanych procesów. W przypadku występowania kointegracji szeregów czasowych stosowano wektorowy model korekty błędem.

Ogólny model VECM dla procesów skointegrowanych można przedstawić w następujący sposób [Kusideł 2000]:

$$\Delta Z_t = \Psi_0 D_t + \sum_{i=1}^s \Pi_i \Delta Z_{t-i} - \Pi Z_{t-1} + \zeta_t, \quad (3)$$

gdzie:

Z_t – n -wymiarowy proces stochastyczny, którego składowe są generowane przez model ARIMA,

Ψ_0 – macierz współczynników przy składnikach deterministycznych wektora D_t ,

Π_i – macierz współczynników autoregresji, przy czym $\Pi = I - \sum_{i=1}^s \Pi_i$,

ζ_t – n -wymiarowy proces białoszumowy.

Do identyfikacji związków przyczynowych badanych zmiennych zastosowano test Grangera (wariant Walda). W tym teście z przyczynowością zmiennej X (Y) względem zmiennej Y (X) mamy do czynienia wówczas, gdy łączny wpływ bieżącej zmiennej objaśniającej i opóźnionej zmiennej objaśniającej X (Y) na Y (X) jest statystycznie istotny. Testowana hipoteza zerowa oznacza więc, że parametry stojące przy zmiennej objaśniającej i jej opóźnieniach są równe zero wobec

hipotezy alternatywnej, że parametry te istotnie różnią się od zera. Statystyka testu ma postać [Ekonometria współczesna 2007]:

$$G = \frac{(S^2(\varepsilon_t) - S^2(\eta_t))/q}{S^2(\eta_t)/(T - k)} \quad (4)$$

gdzie:

$S^2(\varepsilon_t)$ – wariancja resztowa w modelu bez zmiennej, której przyczynowość jest badana,

$S^2(\eta_t)$ – wariancja resztowa w modelu ze zmienną, której przyczynowość jest badana,

q – liczba opóźnień zmiennej objaśniającej,

T – liczebność próby,

k – liczba parametrów w modelu zawierającym zmienną objaśniającą.

Statystyka G przy prawdziwości hipotezy zerowej ma rozkład Fishera-Snedecora o odpowiednio q i $T - k$ stopniach swobody.

Odrzucenie hipotezy zerowej świadczy o tym, że zmienna objaśniająca jest przyczyną w sensie Grangera zmiennej objaśnianej.

3. Wyniki badań przyczynowości BIZ i wskaźników konkurencyjności polskiego handlu zagranicznego

Wybór pomiędzy modelami VAR lub VECM stosowanymi do opisu dynamicznych zależności pomiędzy zmiennymi BIZ oraz Ex, RCAs, RCAp, RCAk, RCAt, TC uzależniono od wyników badania stacjonarności i kointegracji odpowiednich szeregów czasowych. Do badania stacjonarności szeregów czasowych zastosowano rozszerzony test Dickeya-Fullera (test ADF) [Ekonometria współczesna 2007]. Wyniki tego testu przedstawiono w tabeli 1 (w nawiasach podano prawdopodobieństwa testowe).

Tabela 1. Wyniki testu ADF dla zmiennych

Nazwa zmiennej	Oznaczenie zmiennej	Wynik testu ADF dla	
		zmiennej	pierwszych przyrostów zmiennej
Eksport	EX	-1,829 (0,0646)	-9,3968 (0,0000)
Bezpośrednie inwestycje zagraniczne	BIZ	-1,8437 (0,0681)	-9,639 (0,0000)
Wskaźnik przewagi komparatywnej dóbr surowcowych	RCAs	-1,3317 (0,1669)	-7,7223 (0,0000)

cd. tabeli 1

Nazwa zmiennej	Oznaczenie zmiennej	Wynik testu ADF dla	
		zmiennej	pierwszych przyrostów zmiennej
Wskaźnik przewagi komparatywnej dóbr pracochłonnych	RCAp	-1,4060 (0,1467)	-10,516 (0,0000)
Wskaźnik przewagi komparatywnej dóbr kapitałochłonnych	RCAk	-0,6876 (0,4137)	-7,5075 (0,0000)
Wskaźnik przewagi komparatywnej dóbr technologicznie intensywnych	RCAt	-1,0529 (0,2948)	-9,8834 (0,0000)
Wskaźnik pokrycia importu eksportem	TC	1,5121 (0,9660)	-7,0892 (0,0000)

Źródło: obliczenia własne.

Wyniki zamieszczone w tabeli 1 wskazują, że szeregi czasowe zmiennych oryginalnych nie były stacjonarne (prawdopodobieństwa testowe są większe od 0,05), natomiast pierwsze przyrosty tych zmiennych są stacjonarne. Szeregi czasowe badanych zmiennych są więc zintegrowane w stopniu pierwszym.

Optymalną liczbę opóźnień zmiennych w modelach ustalono na podstawie kryterium Schwarza [Schwarz 1978], natomiast badanie kointegracji szeregu czasowego BIZ z pozostałymi szeregami czasowymi i wyznaczenie liczby wektorów kointegrujących przeprowadzono, stosując test śladu Johansena [Johansen 1991, 1992]. W tabeli 2 przedstawiono wyniki obu testów wraz z rekomendowanym modelem do badania zależności dla poszczególnych par zmiennych.

Tabela 2. Wyniki testu Schwarza i testu śladu Johansena dla BIZ i wskaźników konkurencyjności handlu zagranicznego

Para zmiennych	Optymalna liczba opóźnień (kryterium Schwarza)	Liczba wektorów kointegrujących (test śladu Johansena)	Rekomendowany model
BIZ – Ex	5	0	VAR
BIZ – RCA _s	2	1	VECM
BIZ – RCA _p	2	1	VECM
BIZ – RCA _k	2	0	VAR
BIZ – RCA _s	2	1	VECM
BIZ – TC	2	1	VECM

Źródło: obliczenia własne.

Na podstawie analizy zawartości tabeli 2 można stwierdzić, że w czterech przypadkach szeregi czasowe wykazywały kointegrację (wyniki testu śladu Johansena potwierdziły występowanie jednego wektora kointegrującego). Dla tych par zmiennych oszacowano model VECM. Jedynie w przypadku dwóch par zmiennych przyczynowość w sensie Grangera będzie testowana za pomocą modeli VAR, gdyż test Johansena nie wykazał istnienia kointegracji (są to pary zmiennych: BIZ – Ex i BIZ – RCAk).

Wyniki testu Grangera dla bezpośrednich inwestycji zagranicznych i wszystkich analizowanych zmiennych reprezentujących konkurencyjność handlu zagranicznego przedstawiono w tabeli 3 (wyfłuszczone wyniki statystycznie istotne na poziomie istotności równym co najwyżej 0,05).

Tabela 3. Wyniki badania przyczynowości w sensie Grangera pomiędzy bezpośrednimi inwestycjami zagranicznymi i zmiennymi reprezentującymi konkurencyjność handlu zagranicznego w Polsce

Przyczynowość zmiennych	Wynik testu	Wartość <i>p</i>	Model
EX → BIZ	1,5256	0,2096	VAR
BIZ → EX	2,6541	0,0407	VAR
BIZ → RCAs	1,3591	0,2679	VECM
RCAs → BIZ	6,2744	0,0041	VECM
RCAp → BIZ	4,1292	0,0231	VECM
BIZ → RCAp	4,0633	0,0244	VECM
BIZ → RCAk	0,2443	0,7844	VAR
RCAk → BIZ	0,7429	0,4820	VAR
BIZ → RCAt	4,7453	0,0139	VECM
RCAt → BIZ	0,0991	0,9059	VECM
BIZ → TC	2,4415	0,0993	VECM
TC → BIZ	9,2230	0,0005	VECM

Źródło: obliczenia własne.

Analizując wyniki w tabeli 3, należy zauważyć, że bezpośrednie inwestycje zagraniczne na poziomie istotności 0,05 są istotną determinantą eksportu, a także są przyczyną konkurencyjności towarów z branży pracochłonnej i technologicznie intensywnej. Sprzężenie zwrotne we wzajemnym oddziaływaniu zmiennych wykryto jedynie w przypadku BIZ i wskaźnika RCAp. Jednocześnie nie stwierdzono istotnej przyczynowości w sensie Grangera w oddziaływaniu BIZ na ujawnioną przewagę komparatywną towarów surowcchołonych, kapitałochłonych, jak i na współczynnik pokrycia importu eksportem. Z kolei przyczynami BIZ

darczego. Otrzymane wyniki można więc uznać za charakterystyczne dla różnych etapów rozwoju gospodarczego. Trudno więc w ich świetle w jednoznaczny sposób zaklasyfikować Polskę do jednej fazy rozwoju gospodarczego.

4. Wyniki badań przyczynowości komponentów wzorca przewag komparatywnych w Polsce

W modelu dynamicznych przewag komparatywnych zakłada się, że napływ BIZ prowadzi do ewolucyjnych zmian we wzorcu przewag komparatywnych. Modelowy schemat przeobrażeń tego wzorca jest następujący [Ozawa 1992, Tarsiński 2009]:

- w początkowej fazie rozwoju gospodarczego kraj dysponuje przewagami komparatywnymi w branżach surowcochłonnych,
- z czasem przewagi komparatywne w branżach surowcochłonnych są wypierane przez rosnące korzyści komparatywne w branżach pracochłonnych,
- wzrost przewag komparatywnych wyrobów pracochłonnych z czasem ulega regresowi, natomiast coraz większe znaczenie zyskują przewagi komparatywne w branżach kapitałochłonnych,
- dominacja przewag komparatywnych wyrobów kapitałochłonnych stopniowo zmniejsza się, co jest kompensowane rosnącymi przewagami komparatywnymi w branżach technologicznie intensywnych. Rosnące znaczenie tych ostatnich przewag wskazuje na najwyższy poziom rozwoju gospodarczego.

Wydaje się, że taka „wzorcowa” ewolucja przewag komparatywnych stanowi duże uproszczenie rzeczywistości gospodarczej. Nie można przecież wykluczyć sytuacji, w której kraj wysoko rozwinięty posiada przewagi komparatywne np. w branży surowcochłonnej, jak i technologicznie intensywniej. Możliwe wydają się również wzajemne oddziaływania branż wytwarzających wyroby o różnym stopniu nasycenia czynnikami produkcji. To uzasadnia przeprowadzenie badań wzajemnych powiązań w ujęciu dynamicznym pomiędzy wskaźnikami RCA różnych branż. Pozwoli to na pełniejszą identyfikację zmian we wzorcu przewag komparatywnych i ocenę poziomu konkurencyjności polskiego handlu zagranicznego. W tej analizie również posłużono się metodologią przedstawioną w punkcie 2. Po przeprowadzeniu testu ADF i stwierdzeniu zintegrowania w stopniu pierwszym szeregów czasowych wskaźników RCAs, RCA_p, RCA_k i RCA_t (por. tabelę 1), posługując się testem śladu Johansena, zbadano występowanie kointegracji dla każdej pary szeregów czasowych tych wskaźników, a za pomocą testu Schwarza ustalono optymalną liczbę opóźnień badanych zmiennych. Wyniki prezentuje tabela 4.

Tabela 4. Wyniki testu Schwarza i testu śladu Johansena dla wskaźników przewag komparatywnych

Para zmiennych	Optymalna liczba opóźnień (kryterium Schwarza)	Liczba wektorów kointegrujących (test śladu Johansena)	Rekomendowany model
RCA _s – RCA _p	2	1	VECM
RCA _s – RCA _k	2	1	VECM
RCA _s – RCA _t	2	1	VECM
RCA _p – RCA _k	2	1	VECM
RCA _p – RCA _t	2	1	VECM
RCA _k – RCA _t	1	0	VAR

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 5. Wyniki badania przyczynowości w sensie Grangera pomiędzy wskaźnikami przewag komparatywnych towarów o różnym stopniu nasycenia czynnikami produkcji

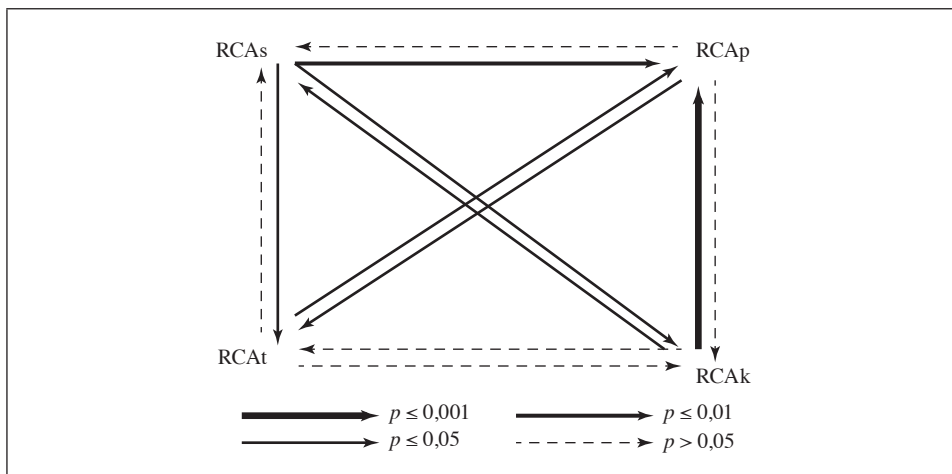
Przyczynowość zmiennych	Wynik testu	Wartość <i>p</i>	Model
RCA _s → RCA _p	6,5612	0,0033	VECM
RCA _p → RCA _s	1,9845	0,1501	VECM
RCA _s → RCA _k	4,3535	0,0191	VECM
RCA _k → RCA _s	3,7336	0,0322	VECM
RCA _s → RCA _t	5,0007	0,0113	VECM
RCA _t → RCA _s	0,6051	0,5507	VECM
RCA _p → RCA _k	1,7499	0,1862	VECM
RCA _k → RCA _p	8,2695	0,0009	VECM
RCA _p → RCA _t	4,9786	0,0115	VECM
RCA _t → RCA _p	5,0133	0,0112	VECM
RCA _k → RCA _t	0,4828	0,4908	VAR
RCA _t → RCA _k	0,0371	0,8481	VAR

Źródło: obliczenia własne.

Analiza wyników w tabeli 4 pozwala stwierdzić, że skointegrowane były wszystkie pary szeregów czasowych z wyjątkiem jednej pary zmiennych, tj. RCA_k i RCA_t. Tylko dla tej pary szeregów czasowych oszacowano model VAR, natomiast we wszystkich pozostałych przypadkach – model VECM. Dla znalezienia jedno- oraz dwukierunkowych powiązań pomiędzy przewagami komparatywnymi towarów o różnym stopniu nasycenia czynnikami produkcji przeprowadzono analizę przyczynowości w sensie Grangera na bazie oszacowanych modeli VECM

i VAR. Rezultaty tej analizy prezentuje tabela 5 (wyniki statystycznie istotne na poziomie istotności równym co najwyżej 0,05 zostały wytłuszczone).

Z analizy zawartości tabeli 5 wynika, że występują dwa sprzężenia zwrotne w oddziaływaniu przewag komparatywnych wyrobów surowcochłonnych i przewag wyrobów kapitałochłonnych, a także przewag komparatywnych towarów pochodzących z branż pracochłonnych i przewag towarów z branż technologicznie intensywnych. Jednokierunkową przyczynowość w sensie Grangera wykryto w trzech przypadkach: przewagi komparatywne towarów surowcochłonnych są przyczyną przewag komparatywnych towarów pracochłonnych, jak i towarów technologicznie intensywnych, a przewagi komparatywne towarów kapitałochłonnych są przyczyną przewag towarów pracochłonnych. Ta ostatnia zależność może wskazywać, że wzrost konkurencyjności towarów pracochłonnych jest poprzedzony wzrostem konkurencyjności towarów kapitałochłonnych. Siłę zależności przyczynowych w sensie Grangera pomiędzy wskaźnikami przewag komparatywnych przedstawiono także na rys. 2.



Rys. 2. Schemat zależności przyczynowych w sensie Grangera pomiędzy wskaźnikami przewag komparatywnych towarów o różnym stopniu nasycenia czynnikami produkcji
Źródło: opracowanie własne.

Z przedstawionego schematu na rys. 2 wynika, że najsilniejsze przyczynowości mają charakter jednokierunkowy i występują: w kierunku od przewag komparatywnych dóbr kapitałochłonnych do dóbr pracochłonnych (wartość $p = 0,0009$) oraz w kierunku od przewag komparatywnych dóbr surowcochłonnych do przewag komparatywnych dóbr kapitałochłonnych (wartość $p = 0,0033$). Dwukierunkowe zależności przyczynowe zachodzące pomiędzy wskaźnikami RCA_k i RCA_s oraz

pomiędzy wskaźnikami RCA_k i RCA_p oraz jednokierunkowa przyczynowość od przewag komparatywnych towarów surowcochłonnych do przewag komparatywnych dóbr kapitałochłonnych są statystycznie istotne na poziomie istotności 0,05. Dla pozostałych par zmiennych nie zaobserwowano istotnej przyczynowości w żadnym kierunku (na poziomie istotności 0,05).

Przedstawione wyniki mogą sugerować, że zależności pomiędzy przewagami konkurencyjnymi towarów o różnym stopniu nasycenia czynnikami produkcji są znacznie bardziej złożone niż przedstawia to model dynamicznych przewag komparatywnych. W teorii ekonomii [Ozawa 1992] przewagę konkurencyjną zyskują branże w następującym porządku: branża surowcochłonna, pracochłonna, kapitałochłonna i technologicznie intensywna, przy czym wzrostowi konkurencyjności towarów jednej branży towarzyszy pogorszenie konkurencyjności towarów należącej do branży o niższym zaawansowaniu technologicznym. Z niniejszych badań wynika, że tylko dla niektórych par branż gospodarki następujących po sobie w sensie „porządku branż” przewidzianego w modelu wzorca dynamicznych przewag komparatywnych występuje przyczynowość w ujęciu Grangera. Warto odnotować fakt oddziaływania na siebie przewag konkurencyjnych towarów należących do „niesąsiadujących” branż gospodarki (w sensie kolejności branż w modelu T. Ozawy).

5. Podsumowanie

W niniejszych badaniach pokazano, że bezpośrednie inwestycje zagraniczne są przyczyną przewag komparatywnych typowych dla różnych faz rozwoju przewidzianych w modelu T. Ozawy [Ozawa 1992]. To utrudnia przypisanie polskiej gospodarki wyłącznie do jednego stadium rozwoju. Wykazano również, że BIZ pobudzają przewagi komparatywne dóbr technologicznie intensywnych, co zgodnie z modelem T. Ozawy lokuje Polskę w wysokiej fazie rozwoju, ale jednocześnie można stwierdzić, że BIZ są przyczyną przewag komparatywnych dóbr pracochłonnych charakterystycznych dla niższego stadium rozwoju. Powiązania pomiędzy komponentami wzorca przewag komparatywnych również mają bardziej złożony charakter niż przewidziano to w modelu T. Ozawy. W świetle otrzymanych wyników można stwierdzić, że przewagi komparatywne typowe dla gospodarek surowcochłonnych pozostają w związku przyczynowym z przewagami komparatywnymi typowymi dla gospodarek wysoko rozwiniętych. Takie wyniki mogą wskazywać, że tempo rozwoju i towarzyszące mu zmiany konkurencyjności różnych działów i sektorów gospodarki polskiej nie są jednakowe. Skutkuje to trudnościami w dopasowaniu konkurencyjności polskiego handlu zagranicznego do modelowego wzorca dynamicznych przewag komparatywnych.

Jednym z powodów tej sytuacji może być fakt, że model T. Ozawy powstał na bazie doświadczeń gospodarek krajów azjatyckich lat 80. XX w., których struktura i otoczenie ekonomiczne znacząco różniły się od realiów polskiej gospodarki ostatniego dziesięciolecia. Dynamiczne przeobrażenia zachodzące w strukturze polskiej gospodarki m.in. dzięki dostępowi do środków finansowych pochodzących z Unii Europejskiej zapewne będą zmieniały obecny wzorzec konkurencyjności polskiego handlu zagranicznego. Zachodzi więc konieczność kontynuacji badań w przeszłości i aktualizacji ich wyników.

Literatura

- Ekonometria współczesna* [2007], red. M. Osińska, Wydawnictwo „Dom Organizatora”, Toruń.
- Gurgul H., Lach Ł. [2009], *Związki przyczynowe pomiędzy bezpośrednimi inwestycjami zagranicznymi w Polsce a podstawowymi wskaźnikami makroekonomicznymi (wyniki badań empirycznych)*, „Ekonomia Menedżerska”, nr 6.
- Hastiadi F.F. [2011], *Regionalism in East Asia: The Role of North East Asian Nations*, „American Journal of Economics and Business Administration”, vol. 3(2), <http://dx.doi.org/10.3844/ajebasp.2011.242.253>.
- Jayanthakumaran K., Lee S.W. [2007], *An Initial Push for Successful Transition from Import Substitution to Export-orientation in Taiwan and China: The FDI-led Hypothesis*, Faculty of Business – Economics Working Papers, WP 07-03.
- Johansen S. [1991], *Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models*, „Econometrica”, vol. 59, nr 6, <http://dx.doi.org/10.2307/2938278>.
- Johansen S. [1992], *Determination of Cointegration Rank in the Presence of a Linear Trend*, „Oxford Bulletin of Economics and Statistics”, vol. 54, nr 3, <http://dx.doi.org/10.1111/j.1468-0084.1992.tb00008.x>.
- Kusideł E. [2000], *Modele wektorowo-autoregresyjne VAR. Metodologia i zastosowania*, ABSOLWENT, Łódź.
- Misala J. [2011], *Międzynarodowa konkurencyjność gospodarki narodowej*, PWE, Warszawa.
- Misala J., Pluciński E.M. [2000], *Handel wewnątrzgałęziowy między Polską a Unią Europejską. Teoria i praktyka*, SGH, Warszawa.
- Ozawa T. [1992], *Foreign Direct Investment and Economic Development*, „Transnational Corporation”, vol. 1, nr 1.
- Salamaga M. [2013], *Modelowanie wpływu bezpośrednich inwestycji zagranicznych na handel zagraniczny w świetle wybranych teorii ekonomii na przykładzie krajów Europy Środkowo-Wschodniej*, Zeszyty Naukowe, Seria specjalna: Monografie nr 223, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Kraków.
- Schwarz G. [1978], *Estimating the Dimension of a Model*, *The Annals of Statistics*, vol. 6, nr 2, <http://dx.doi.org/10.1214/aos/1176344136>.
- Sultan Z.A. [2013], *A Causal Relationship between FDI Inflows and Export: The Case of India*, „Journal of Economics and Sustainable Development”, vol. 4, nr 2.

Szymanik E. [2004], *Konkurencyjność eksportu na przykładzie wymiany Polski z krajami Unii Europejskiej*, Krakowskie Towarzystwo Edukacyjne sp. z o.o., Oficyna Wydawnicza AFM, Kraków.

Tarasiński L. [2009], *Bezpośrednie inwestycje zagraniczne a bilans handlowy i struktura przewag komparatywnych* [w:] *Wpływ bezpośrednich inwestycji zagranicznych na konkurencyjność polskiej gospodarki*, red. E. Frejtag-Mika, PWE, Warszawa.

Identification of Causal Relationships between Foreign Direct Investment and Foreign Trade Patterns in Poland

(Abstract)

In the literature there are studies that analyse the impact of foreign direct investment on changes in the pattern of comparative advantage, and on the structure of foreign trade. On the other hand, there are also possible feedback loops, in which the evolution of the pattern of comparative advantage, or the transformation of the structure of foreign trade influences foreign direct investment. So we can ask what the role they have in creating the interactions between variables, or which of these relationships are statistically significant and what is the direction of the impact of variables. The results of Granger causality test can help answer these questions. The aim of this paper was to find causal relationships between foreign direct investment and the variables representing the competitiveness of Polish foreign trade. The study employed vector autoregression models and Granger causality test.

Keywords: foreign direct investment, foreign trade, VAR model, VECM model, Granger causality test.

Henryk Zawadzki

Katedra Matematyki

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Analiza dynamiki modeli wzrostu gospodarczego za pomocą środowiska obliczeniowego Mathematica

Streszczenie

Podstawowy aparat matematyczny teorii wzrostu gospodarczego (w przypadku modeli z czasem ciągłym) stanowią równania różniczkowe oraz sterowanie optymalne, czyli wyznaczanie rozwiązań równań różniczkowych spełniających określone warunki i optymalizujących pewien funkcjonal całkowity. W artykule przedstawiono (na przykładzie modeli wzrostu Mankiwa-Romera-Weila oraz Lucasa-Uzawy) wybrane możliwości programu *Mathematica* w zakresie: numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych (równań ruchu) i wyznaczania optymalnych wartości funkcjonałów (całkowitej zdyskontowanej użyteczności) w przypadku, gdy rozwiązania optymalne wyznaczone są jedynie w sposób numeryczny, symbolicznego różniczkowania rozwiązań równań różniczkowych, wyrażonych za pomocą pewnej klasy funkcji specjalnych – funkcji hipergeometrycznych Gaussa oraz graficznej prezentacji rozwiązań równań różniczkowych.

Słowa kluczowe: *Mathematica*, równania różniczkowe, modele wzrostu gospodarczego, sterowanie optymalne.

1. Wprowadzenie

Teoria wzrostu gospodarczego jest niewątpliwie jednym z najbardziej sformalizowanych działów ekonomii. Stosowany w niej aparat matematyczny obejmuje

m.in. teorię równań różniczkowych i różnicowych, teorię sterowania optymalnego (lub ogólniej – optymalizację dynamiczną) oraz jakościową teorię układów dynamicznych. Wyznaczanie ścieżek wzrostu (optymalnych ścieżek wzrostu) modelowanych gospodarek sprowadza się do rozwiązywania równań różniczkowych lub przynajmniej jakościowej analizy dynamiki układów generowanych przez te równania. Niezwykle pomocnymi, a czasami niezastąpionymi narzędziami wspomagającymi analizę matematycznych modeli wzrostu są programy komputerowe zwane systemami algebry komputerowej (*computer algebra systems, CAS*). Jednym z głównych programów tego typu, a właściwie środowiskiem służącym do naukowych obliczeń numerycznych i symbolicznych, sporządzania dwuwymiarowej i trójwymiarowej grafiki oraz interaktywnych dokumentów jest *Mathematica*, której producentem jest Wolfram Research Inc. z siedzibą w Champaign IL, USA. W artykule przedstawiono (na przykładzie modeli wzrostu Mankiwa-Romera-Weila oraz Lucasa-Uzawy) wybrane możliwości programu *Mathematica* w zakresie:

- numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych (równań ruchu) oraz wyznaczania optymalnych wartości funkcjonałów (całkowanej zdyskontowanej użyteczności – *lifetime utility*) w przypadku, gdy rozwiązania optymalne wyznaczone są jedynie w sposób przybliżony (numeryczny),
- symbolicznego różniczkowania rozwiązań równań różniczkowych, wyrażonych za pomocą pewnej klasy funkcji specjalnych – funkcji hipergeometrycznych Gaussa,
- graficznej prezentacji rozwiązań równań różniczkowych.

2. Model Mankiwa-Romera-Weila ze sterowaniem

T. Tokarski [2011] przedstawia pewien problem sterowania optymalnego w neoklasycznym modelu wzrostu Mankiwa-Romera-Weila ([Mankiw, Romer i Weil 1992]). Problem polega na wyznaczeniu ścieżek czasowych stóp inwestycji $s_K(t)$ oraz $s_H(t)$ odpowiednio w kapitał rzeczowy i ludzki, które maksymalizują całą preferencję (łącznie zdyskontowaną użyteczność) typowego konsumenta daną wzorem:

$$U = \int_0^{+\infty} \frac{\{[1 - s_K(t) - s_H(t)]y(t)\}^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} e^{-\rho t} dt. \quad (1)$$

W powyższej całce $y(t) = Y(t)/L(t)$ jest wielkością produkcji $Y(t)$ przypadającej na pracującego, przy czym liczba pracujących $L(t)$ rośnie wykładniczo, zgodnie ze wzorem $L(t) = L_0 e^{nt}$, w którym $L_0 > 0$ jest zasobem pracy w chwili początkowej $t = 0$, a $n > 0$ stopą wzrostu zasobu liczby pracujących. Wielkości $\rho > 0$ oraz

$\sigma \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ są parametrami oznaczającymi odpowiednio stopę dyskontową oraz współczynnik względnej niechęci konsumenta do ryzyka.

W rozważanym modelu funkcja produkcji jest funkcją Cobba-Douglasa

$$Y(t) = [K(t)]^\alpha [H(t)]^\beta [A(t)L(t)]^{1-\alpha-\beta}, \quad (2)$$

w której $K(t)$, $H(t)$ i $A(t)$ oznaczają kolejno: zasoby kapitału rzeczowego, kapitału ludzkiego oraz zasoby wiedzy. Te ostatnie określone są wzorem $A(t) = A_0 e^{gt}$, w którym $A_0 > 0$ oznacza zasoby wiedzy w chwili $t = 0$, a $g > 0$ stopę wzrostu postępu technicznego. Dodatkowo parametry α i β spełniające warunek $\alpha + \beta < 1$, oznaczają elastyczność produkcji Y względem kapitału rzeczowego K i kapitału ludzkiego H . Zakładając, że dynamika kapitału K i kapitału H opisana jest równaniami różniczkowymi:

$$K'(t) = s_K(t)Y(t) - \delta_K K(t), \quad (3)$$

$$H'(t) = s_H(t)Y(t) - \delta_H H(t), \quad (4)$$

gdzie: $\delta_K, \delta_H \in (0, 1)$ są stopami deprecjacji kapitałów, wspomniany problem sterowania optymalnego można sformułować następująco: znaleźć ścieżki czasowe stóp inwestycji $s_K(t)$ oraz $s_H(t)$, które maksymalizują łączną zdyskontowaną użyteczność (1), gdy zmienne stanu $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$, $h(t) = \frac{H(t)}{L(t)}$ oraz $y(t)$ spełniają równania ruchu

$$k'(t) = s_K(t)y(t) - (\delta_K + n)k(t), \quad (5)$$

$$h'(t) = s_H(t)y(t) - (\delta_H + n)h(t), \quad (6)$$

$$y(t) = A_0^{1-\alpha-\beta} e^{(1-\alpha-\beta)gt} [k(t)]^\alpha [h(t)]^\beta, \quad (7)$$

zmienne sterujące $s_K(t)$ i $s_H(t)$ spełniają w każdym momencie $t \in [0, +\infty)$ warunki $s_K(t), s_H(t) \in (0, 1)$ oraz $s_K(t) + s_H(t) \in (0, 1)$, a warunki początkowe mają postać

$$k(0) = k_0, h(0) = h_0, \quad (8)$$

gdzie $k_0, h_0 > 0$ oznaczają początkowe zasoby kapitału rzeczowego i ludzkiego.

T. Tokarski [2011] dowiódł, że przy dodatkowym założeniu, iż stopy inwestycji $s_K(t)$ i $s_H(t)$ są stałe w czasie, optymalnymi ścieżkami czasowymi, czyli ścieżkami maksymalizującymi funkcjonal U , są:

$$s_K(t) \equiv \frac{\alpha(g + \delta_K + n)}{\rho + \delta_K + n + \sigma g}, \quad (9)$$

$$s_H(t) \equiv \frac{\beta(g + \delta_H + n)}{\rho + \delta_H + n + \sigma g}. \quad (10)$$

Chcąc obliczyć maksymalną wartość funkcjonału U , należałoby podstawić do układu równań (5), (6) produkcję *per capita* $y(t)$ określoną wzorem (7) oraz przedstawione wzorami (9) i (10) optymalne sterowania. Po rozwiązaniu tego układu (dla zadanych warunków początkowych (8)) należałoby podstawić jego rozwiązania i do wzoru (7), a otrzymaną w ten sposób funkcję $y(t)$ – do funkcji podcałkowej funkcjonału (1). Ponieważ jednak otrzymanie dokładnych rozwiązań wspomnianego wyżej, nieliniowego układu nie jest możliwe, pozostaje jedynie wyznaczyć jego rozwiązanie przybliżone (numeryczne), które pozwala na oszacowanie maksymalnej wartości U , czyli łącznej, zdyskontowanej użyteczności konsumenta. Dla ustalonej wartości parametrów za pomocą *Mathematica* można oszacować maksymalną wartość funkcjonału U dla sterowań optymalnych (9), (10), mimo że nie jest znana postać analityczna optymalnych ścieżek czasowych zmiennych stanu k oraz h .

Ustalmy wartości parametrów modelu oraz warunki początkowe:

$$\begin{aligned} \text{In[1]} = & \mathbf{A0} = 1; \delta\mathbf{K} = 0.03; \delta\mathbf{H} = 0.02; \alpha = 0.35; \beta = 0.4; \\ & \mathbf{n} = 0.02; \mathbf{g} = 0.01; \mathbf{k0} = 1; \mathbf{h0} = 1; \sigma = 0.5; \rho = 0.01; \end{aligned}$$

Dla powyższych wartości parametrów obliczmy optymalne wartości zmiennych sterujących (wzory (9) i (10)):

$$\text{In[3]} = \left\{ \mathbf{sK} = \frac{\alpha (\mathbf{g} + \delta\mathbf{K} + \mathbf{n})}{\rho + \delta\mathbf{K} + \mathbf{n} + \sigma \mathbf{g}}, \mathbf{sH} = \frac{\beta (\mathbf{g} + \delta\mathbf{H} + \mathbf{n})}{\rho + \delta\mathbf{H} + \mathbf{n} + \rho \mathbf{g}} \right\}$$

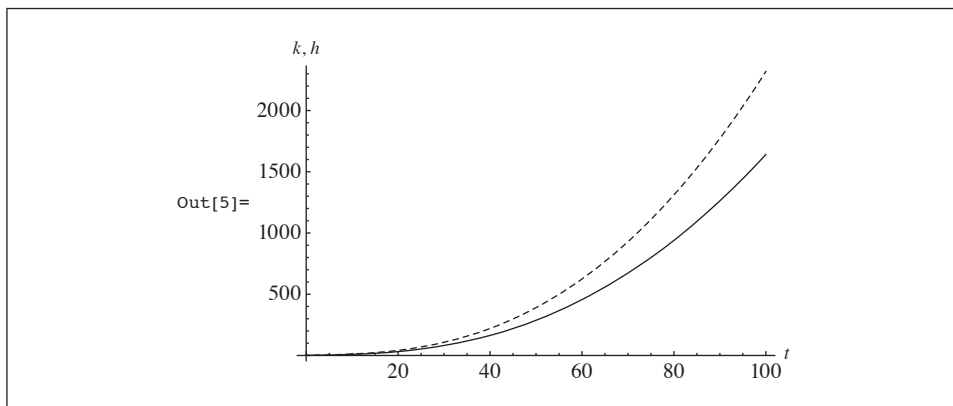
$$\text{Out[3]} = \{0.323077, 0.399202\}$$

Następnie za pomocą instrukcji **NDSolve** wyznaczmy w sposób numeryczny rozwiązanie „**sol**” układu (5), (6) i narysujmy wykresy tworzących to rozwiązanie funkcji $k(t)$ i $h(t)$ w przedziale $[0, 100]$ (rys. 1).

$$\begin{aligned} \text{In[4]} = & \mathbf{sol} = \{k[t], h[t]\} /. \text{NDSolve}\left[\left\{k'[t] = (\mathbf{A0})^{1-\alpha-\beta} \text{Exp}[(1-\alpha-\beta) \mathbf{g} t] (k[t])^\alpha (h[t])^\beta \right. \right. \\ & * \frac{\alpha (\mathbf{g} + \delta\mathbf{K} + \mathbf{n})}{\rho + \delta\mathbf{K} + \mathbf{n} + \sigma \mathbf{g}} - (\delta\mathbf{K} + \mathbf{n}) k[t], h'[t] = (\mathbf{A0})^{1-\alpha-\beta} \text{Exp}[(1-\alpha-\beta) \mathbf{g} t] (k[t])^\alpha (h[t])^\beta \\ & * \frac{\beta (\mathbf{g} + \delta\mathbf{H} + \mathbf{n})}{\rho + \delta\mathbf{H} + \mathbf{n} + \rho \mathbf{g}} - (\delta\mathbf{H} + \mathbf{n}) h[t], k[0] = \mathbf{k0}, h[0] = \mathbf{h0}\}, \{k, h\}, \{t, 0, 3500\}, \text{MaxSteps} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\text{Out[4]} = \{\{\text{InterpolatingFunction}[\{\{0., 3500.\}\}, <>][t], \text{InterpolatingFunction}[\{\{0., 3500.\}\}, <>][t]\}\}$$

$$\text{In[5]} = \text{Plot}[\{\mathbf{sol}[[1, 1]], \mathbf{sol}[[1, 2]]\}, \{t, 0, 100\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{t, h\}]$$



Rys. 1. Ścieżki czasowe kapitału rzeczowego k (krzywa położona niżej) i kapitału ludzkiego h w przedziale $[0, 100]$

Źródło: opracowanie własne.

Obliczmy teraz wartości funkcjonału U , całkując w przedziale $[0, T]$, dla kilku dużych wartości czasu T , na przykład $T = 1000, 1500, 2000, 2500, 3000$ oraz 3500 .

```

In[6]:= Table [ Integrate [ 1 / (1 - sigma) * ((1 - sK - sH) * (A0)^(1 - alpha - beta) Exp[(1 - alpha - beta) g t]
      * (sol[[1, 1]])^alpha (sol[[1, 2]])^beta)^(1 - sigma) - 1) Exp[-rho t] dt // N, {T, 1000, 3500, 500} ]
Out[6]:= {2320.11, 2342.42, 2344.26, 2344.41, 2344.42, 2344.42}
    
```

Jak można zauważyć, w miarę wzrostu T wartości funkcjonału stabilizują się i można przyjąć, że maksymalna wartość łącznej zdyskontowanej użyteczności konsumenta wynosi $U_{\max} \approx 2344.42$.

3. Model Lucas-Uzawy i funkcja hipergeometryczna Gaussa

R. Boucekkine i J.R. Ruiz-Tamarit [2008] rozważyli dwusektorowy, endogeniczny model wzrostu Lucasa-Uzawy i związany z nim problem optymalizacji dynamicznej

$$U = \int_0^{\infty} \frac{c(t)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} N(t) e^{-\rho t} dt \rightarrow \max \tag{11}$$

z równaniami ruchu

$$\begin{aligned}
 K'(t) &= AK(t)^\beta (u(t)N(t)h(t))^{1-\beta} - pK(t) - N(t)c(t), \\
 h'(t) &= \delta(1-u(t))h(t) - \theta h(t),
 \end{aligned}$$

warunkami

$$K(0) = K_0, \quad h(0) = h_0, \quad N(0) = N_0, \quad K(t) \geq 0, \quad h(t) \geq 0 \\ c(t) \geq 0, \quad u(t) \in [0, 1]$$

oraz warunkami transversalności

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_1(t) K(t) \exp(-\rho t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_2(t) h(t) \exp(-\rho t) = 0.$$

W modelu tym zmiennymi są: zasoby kapitału fizycznego K i kapitału ludzkiego h , wielkość populacji N (której egzogeniczna, stała w czasie stopa wzrostu jest równa n), strumień konsumpcji *per capita* c oraz frakcja czasu poświęconego na produkcję dóbr konsumpcyjnych u . Dwie ostatnie zmienne, czyli c i u są zmiennymi sterującymi modelu. Parametrami (oprócz stopy wzrostu populacji n) są: współczynnik względnej awersji do ryzyka σ , stopa dyskontowa ρ , współczynniki postępu technologiczno-organizacyjnego w sektorze produkcyjnym i edukacyjnym A i δ , elastyczność produkcji względem kapitału fizycznego β oraz stopy deprecjacji kapitału fizycznego i ludzkiego p i θ . Parametry spełniają warunki: $\delta, \rho, \sigma > 0, n, p, \theta \geq 0, \beta \in (0, 1), \rho > n$, oraz $\delta + n > \theta + \rho$.

Autorom udało się wyznaczyć w sposób analityczny optymalne ścieżki czasowe zasobów kapitału fizycznego K , kapitału ludzkiego h oraz zmiennych sterujących c i u w zamkniętej formie za pomocą funkcji hipergeometrycznej Gaussa ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x)$. Funkcję tę, określoną dla $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$ można przedstawić w postaci szeregu:

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n x^n}{(\gamma)_n n!}, \quad (12)$$

gdzie: $(\delta)_n = \delta(\delta + 1) \dots (\delta + n - 1)$ jest symbolem Pochhammera. Szereg (12), zwany szeregiem hipergeometrycznym, jest dla $|x| < 1$ zbieżny jednostajnie i bezwzględnie. Dla $\gamma > \beta > 0$ funkcję ${}_2F_1$ można także przedstawić jako całkę

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tx)^{-\alpha} dt. \quad (13)$$

Wzór powyższy znany jest jako reprezentacja całkowa Eulera funkcji hipergeometrycznej Gaussa. Wzory, które umożliwiają przedłużenie analityczne funkcji ${}_2F_1$ poza przedział $|x| < 1$, podaje m.in. [Korn i Korn 1983, cz. 1, s. 270].

Przykładowo ścieżka kapitału K ma postać:

$$K(t) = K_0 \left(\frac{\lambda_1(0)}{\lambda_2(0)} \right)^{1/\beta} \left(\frac{\varepsilon}{\delta + n + p - \theta} \right)^{1/(1-\beta)} \frac{{}_2F_1(t)}{{}_2F_1(0)} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{(\delta + n + p - \theta)(\beta - \sigma) - \beta(\rho + p - n\sigma)}{\beta\sigma} t \right\} \times \\ \times \left[-1 + \exp \left\{ \frac{(1-\beta)(\delta + n + p - \theta)}{\beta} \right\} t + \frac{\delta + n + p - \theta}{\varepsilon} \left(\frac{\lambda_1(0)}{\lambda_2(0)} \right)^{(\beta-1)/\beta} \right]^{1/(1-\beta)} \quad (14)$$

We wzorze (14)

$${}_2F_1(t) = {}_2F_1\left(a, b, \gamma; \left(1 - \frac{\delta + n + p - \theta}{\varepsilon} \left[\frac{\lambda_1(0)}{\lambda_2(0)}\right]^{\frac{\beta-1}{\beta}}\right) \times \exp\left[-\frac{(1-\beta)(\delta + n + p - \theta)}{\beta} t\right]\right),$$

gdzie

$$\begin{aligned} a &= -\frac{(\delta + n + p - \theta)(\beta - \sigma) - \beta(\rho + p - n\sigma - p\sigma)}{\sigma(\delta + n + p - \theta)(1 - \beta)}, \\ b &= -\frac{\beta - \sigma}{\sigma(1 - \beta)}, \\ \gamma &= 1 + a, \\ \varepsilon &= A\beta[(1 - \beta)AN_0/\delta]^{(1-\beta)/\beta}, \end{aligned} \tag{15}$$

natomiast $\lambda_1 = \lambda_1(t)$ oraz $\lambda_2 = \lambda_2(t)$ są mnożnikami Lagrange'a występującymi w hamiltonianie wartości bieżącej:

$$H^c = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} N + \lambda_1 [AK^\beta (uNh)^{1-\beta} - pK - Nc] + \lambda_2 [\delta(1-u)h - \theta h].$$

Wartości $\lambda_1(0)$ i $\lambda_2(0)$ mnożników Lagrange'a w chwili początkowej $t = 0$ wyznaczone są z układu równań:

$$\frac{{}_2F_1(0)}{{}_2\tilde{F}_1(0)} = -\frac{(1-\beta)\varepsilon\sigma}{[(\delta - \theta)(1 - \sigma) + n - \rho]\beta} \frac{K_0}{h_0} \left(\frac{\lambda_1(0)}{\lambda_2(0)}\right)^{1/\beta}, \tag{16}$$

$$\frac{K_0}{{}_2F_1(0)} \left(\frac{\lambda_1(0)}{\lambda_2(0)}\right)^{\frac{1}{\beta}} = -\frac{\sigma\beta N_0[\lambda_2(0)]^{-1/\sigma} [(\delta + n + p - \theta)/\varepsilon]^{(\sigma-\beta)/[\sigma(1-\beta)]]}{(\delta + n + p - \theta)(\beta - \sigma) - \beta(\rho + p - n\sigma - p\sigma)}, \tag{17}$$

w którym

$${}_2\tilde{F}_1(t) = {}_2F_1\left(a - 1, b, \gamma; \left(1 - \frac{\delta + n + p - \theta}{\varepsilon} \left[\frac{\lambda_1(0)}{\lambda_2(0)}\right]^{\frac{\beta-1}{\beta}}\right) \times \exp\left[-\frac{(1-\beta)(\delta + n + p - \theta)}{\beta} t\right]\right).$$

Wzór (14) zachodzi, gdy parametry modelu spełniają warunki:

$$\begin{aligned} (\delta + n + p - \theta)(\beta - \sigma) - \beta(\rho + p - n\sigma - p\sigma) &< -\sigma(1 - \beta)(\delta + n + p - \theta) < 0, \\ (\delta - \theta)(1 - \sigma) + n - \rho &< 0 \end{aligned} \tag{18}$$

oraz układ równań (16), (17) ma dokładnie jedno dodatnie rozwiązanie.

Korzyści wynikające z wprowadzonych w [Boucekkinei Ruiz-Tamarit 2008] wzorów określających ścieżki czasowe zmiennych K , h , u i c stają się widoczne dopiero wtedy, gdy mamy do dyspozycji odpowiednie oprogramowanie. *Mathematica* pozwala nie tylko na obliczanie wartości liczbowych wspomnianych wyżej zmiennych w dowolnej chwili $t \geq 0$, lecz także na ich różniczkowanie i rysowanie ścieżek czasowych.

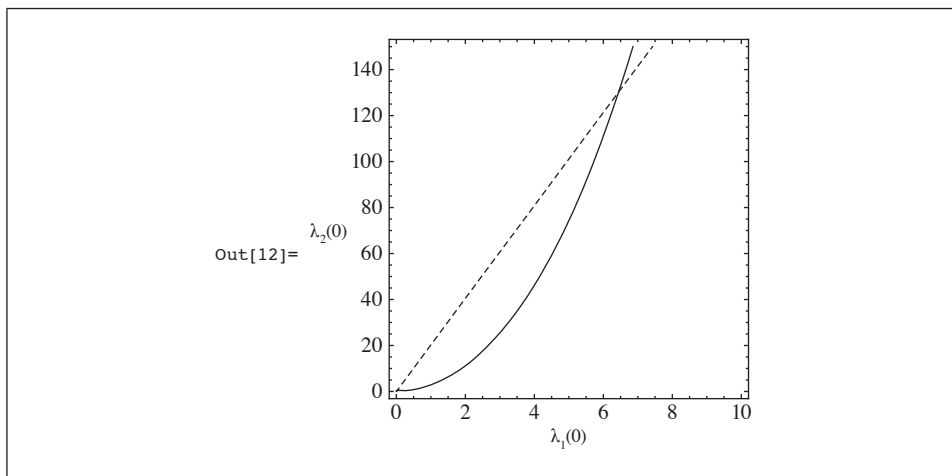
Za pomocą programu *Mathematica* można (dla ustalonych wartości parametrów i zadanych warunków początkowych) z dużą dokładnością wyznaczyć przybliżone, dodatnie rozwiązania $\lambda_1(0)$ i $\lambda_2(0)$ złożonego, nieliniowego układu równań (16), (17). Wystarczy w tym celu wykorzystać funkcję **Hypergeometric2F1[a,b,c,z]** oraz instrukcje **ContourPlot** i **FindRoot** tego programu. Wspomniana funkcja oblicza dla rzeczywistych lub zespolonych wartości parametrów a, b, c oraz argumentu z , wartości hipergeometrycznej funkcji Gaussa ${}_2F_1(a, b, c; z)$. Instrukcja **ContourPlot** umożliwia przybliżoną, wizualną lokalizację rozwiązań wspomnianego układu, będących punktami przecięcia krzywych wyznaczonych przez równania tego układu. Wstępna lokalizacja rozwiązania pozwala z kolei na wyznaczenie za pomocą instrukcji **FindRoot** dokładnych wartości pierwiastków $\lambda_1(0)$ i $\lambda_2(0)$.

Ustalmy wartości parametrów i wartości początkowe modelu Lucasa-Uzawy oraz obliczmy występujące we wzorach (15) wielkości a, b, γ i ϵ .

```
In[1]= Clear[N0, n, A, δ, p, θ, ρ, β, σ, K0, h0]
In[2]= N0 = 1; n = 0.01; A = 1; δ = 0.06; p = 0.05; θ = 0.01;
      ρ = 0.04; β = 0.45; σ = 1.2; K0 = 1; h0 = 0.25;
In[4]= ε = β * A * ((1 - β) * A * N0 / δ) ^ ((1 - β) / β);
      a = - (δ + n + p - θ) (β - σ) - β (ρ + p - n σ - p σ) /
           σ (δ + n + p - θ) (1 - β);
      b = - (β - σ) /
           σ (1 - β);
      γ = 1 + a;
```

Zdefiniujmy lewe i prawe strony układu równań (16), (17) oraz narysujmy krzywe wyznaczone przez równania tego układu (rys. 2).

```
In[8]= lhs1[λ10_, λ20_] = K0 / Hypergeometric2F1[a, b, γ, 1 - (δ + n + p - θ) / ε * (λ10 / λ20) ^ (-1 - β / ε)] * (λ10 / λ20) ^ (1 / β);
      rhs1[λ10_, λ20_] = - (σ β N0 (λ20) ^ (-1 / σ) ((δ + n + p - θ) / ε) ^ (σ - β / ε)) /
           ((δ + n + p - θ) (β - σ) - β (ρ + p - n σ - p σ));
      lhs2[λ10_, λ20_] = 1 / Hypergeometric2F1[a - 1, b, γ, 1 - (δ + n + p - θ) / ε * (λ10 / λ20) ^ (1 - β / ε)] *
           Hypergeometric2F1[a, b, γ, 1 - (δ + n + p - θ) / ε * (λ10 / λ20) ^ (1 - β / ε)];
      rhs2[λ10_, λ20_] = (1 - β) ε σ /
           - ((δ - θ) (1 - σ) + n - ρ) β * K0 / h0 * (λ10 / λ20) ^ (1 / β);
In[17]= ContourPlot[{lhs1[λ10, λ20] == rhs1[λ10, λ20], lhs2[λ10, λ20] == rhs2[λ10, λ20]},
      {λ10, 0, 10}, {λ20, 0, 150}, PlotPoints -> {100, 100}, FrameLabel -> {"λ1(0)", "λ2(0)"},
      RotateLabel -> False] // Quiet
```



Rys. 2. Krzywe wyznaczone przez równania układu (16) i (17) (dla wartości parametrów z [Boucekkine i Ruiz-Tamarit 2004])

Źródło: opracowanie własne.

Z rys. 2 odczytujemy przybliżone wartości dodatnich mnożników Lagrange’a $\lambda_1(0) \approx 6$ i $\lambda_2(0) \approx 130$.

```
In[13]= FindRoot[{lhs1[λ10, λ20] == rhs1[λ10, λ20], lhs2[λ10, λ20] == rhs2[λ10, λ20]},
  {{λ10, 6}, {λ20, 120}}]
```

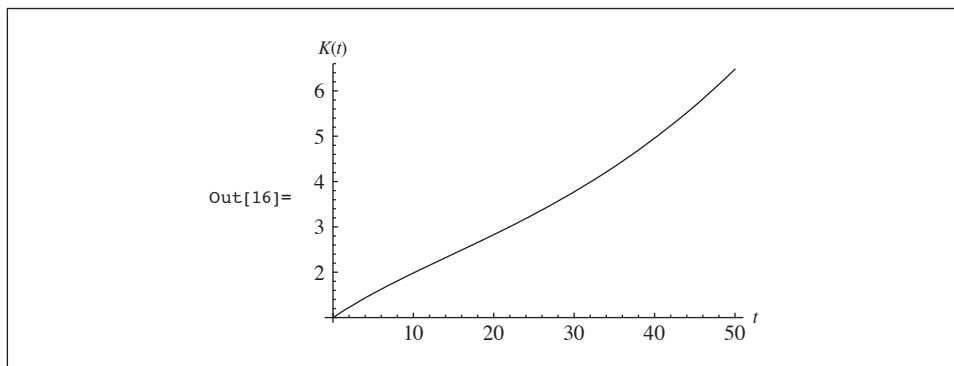
```
Out[13]= {λ10 -> 6.43694, λ20 -> 130.024}
```

Wstawiając powyższe wartości mnożników do wzoru (14), możemy narysować ścieżki czasowe K i K' (rys. 3 i 4) oraz obliczyć wartości tych funkcji w wybranych momentach.

```
In[14]= λ10 = 6.43694; λ20 = 130.024;
```

$$\begin{aligned}
 \text{In[15]= } K[t_] := & \text{R0} * \left(\frac{\lambda_{10}}{\lambda_{20}}\right)^{\frac{1}{\beta}} * \left(\frac{\epsilon}{\delta + n + p - \theta}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} * \\
 & \left(\text{Hypergeometric2F1}\left[a, b, \gamma, \left(1 - \frac{\delta + n + p - \theta}{\epsilon} * \left(\frac{\lambda_{10}}{\lambda_{20}}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}}\right) * \text{Exp}\left[-\frac{(1-\beta)(\delta + n + p - \theta)}{\beta} t\right]\right] \right. \\
 & \left. / \text{Hypergeometric2F1}\left[a, b, \gamma, 1 - \frac{\delta + n + p - \theta}{\epsilon} * \left(\frac{\lambda_{10}}{\lambda_{20}}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}}\right] \right) * \\
 & \text{Exp}\left[\frac{(\delta + n + p - \theta)(\beta - \sigma) - \beta(\rho + p - n\sigma)}{\beta\sigma} t\right] * \\
 & \left(-1 + \text{Exp}\left[\frac{(1-\beta) * (\delta + n + p - \theta)}{\beta} t\right] + \frac{(\delta + n + p - \theta)}{\epsilon} * \left(\frac{\lambda_{10}}{\lambda_{20}}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}
 \end{aligned}$$

```
In[16]= Plot[K[t], {t, 0, 50}, AxesLabel -> {"t", "K(t)"}]
```



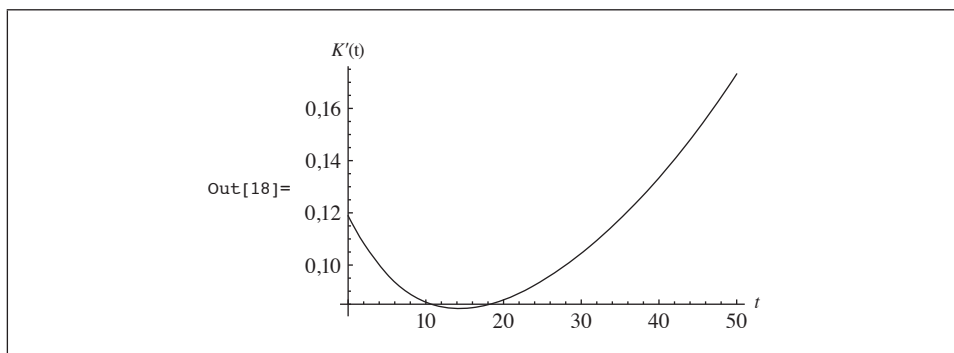
Rys. 3. Ścieżka czasowa kapitału fizycznego K w modelu Lucasa-Uzawy (dla wartości parametrów z [Boucekkine i Ruiz-Tamarit 2004])

Źródło: opracowanie własne.

```
In[17]= {K[0], K[10], K[50]}
```

```
Out[17]= {1., 1.98459, 6.47753}
```

```
In[18]= Plot[K'[t], {t, 0, 50}, PlotRange -> All, AxesLabel -> {"t", "K'(t)"}]
```



Rys. 4. Wykres pochodnej K' w modelu Lucasa-Uzawy (dla wartości parametrów z [Boucekkine i Ruiz-Tamarit 2004])

Źródło: opracowanie własne.

```
In[19]= {K'[0], K'[10], K'[50]}
```

```
Out[19]= {0.118843, 0.0857851, 0.17318}
```

W analogiczny sposób można wyznaczać wartości i rysować ścieżki wzrostu pozostałych zmiennych modelu, korzystając z formuł podanych w [Boucekkine i Ruiz-Tamarit 2008].

4. Uwagi końcowe

W artykule przedstawiono zaledwie skromną próbkę możliwości programu *Mathematica* jako narzędzia wspomagającego ilościową i jakościową analizę matematycznych modeli wzrostu gospodarczego lub ogólniej – dynamikę ekonomiczną. Więcej przykładów oraz informacje dotyczące stosowanych w tekście instrukcji programu *Mathematica* można znaleźć m.in. w [Zawadzki 2012] oraz na stronie internetowej producenta programu www.wolfram.com.

Literatura

- Boucekkine R., Ruiz-Tamarit J.R. [2004], *Special Functions for the Study of Economic Dynamics: The Case of the Lucas-Uzawa Model*, „CORE Discussion Paper”, No. 84, <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.688904>.
- Boucekkine R., Ruiz-Tamarit J.R. [2008], *Special Functions for the Study of Economic Dynamics: The Case of the Lucas-Uzawa Model*, „Journal of Mathematical Economics”, vol. 44, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmateco.2007.05.001>.
- Korn G.A., Korn T.M. [1983], *Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów*, cz. 1, PWN, Warszawa.
- Mankiw N.G., Romer D., Weil D.N. [1992], *A Contribution to the Empirics of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics”, vol. 107, <http://dx.doi.org/10.2307/2118477>.
- Tokarski T. [2011], *Ekonomia matematyczna. Modele makroekonomiczne*, PWE, Warszawa.
- Zawadzki H. [2012], *Atraktory w modelach równowagi i wzrostu gospodarczego*, Placet, Warszawa.

The Analysis of the Dynamics of Economic Growth Models with Mathematica (Abstract)

Differential equations and optimal control theory are the basic tools of the mathematical theory of economic growth. The aim of this paper is to show (using the example of the Mankiw-Romer-Weil and Lucas-Uzawa growth models) some capabilities of *Mathematica* in the symbolic and numerical solving of differential equations, calculating optimal values of integral functional (discounted lifetime utility) when only numerical optimal solutions are known, the symbolic differentiation of solutions given in terms of hypergeometric Gauss functions and the graphical presentation of solutions to differential equations.

Keywords: *Mathematica*, differential equations, economic growth models, optimal control.

Agnieszka Lipieta

Department of Mathematics
Cracow University of Economics

Changing Production on the Market with Continuum Traders

Abstract

Assume that in a Debreu private ownership economy, all consumption sets are contained in a proper subspace of the commodity-price space. This property motivates producers to change their activities on markets to plans from the same subspace. Alterations in production take time, so to model changes occurring in the production sector of an economy, time should be involved. In contrast to the results I obtained from a 2010 study, in the economy with continuum traders, excluding a finite number of producers from the process that adjusts the economy to the given requirements does not disturb equilibrium. The aim of this paper is to present the possible trajectories of producers' activity changing their plans in the economy with continuum traders. The process of moving the production system and, consequently, the whole economy to an economy reduced to a given subspace will be elaborated. As a result, a system of economies in equilibrium dependent on time is presented.

Keywords: economy with continuum traders, reduced consumption sphere, continuous trajectory of changes, projections.

1. Introduction

Since G. Debreu presented his results on the (static) private ownership economy (see e.g. Debreu 1959, 1982), many dynamic economic structures on the basis of the Debreu economy have been defined. Interesting results can be found

in (Radner 1970, Magill & Quinzii 2002). In (Lipieta 2010) and (Lipieta 2012) the evolution of the Debreu economy was also studied but by the assumption that the consumption system was contained in a proper subspace of the commodity-price space. As a result, the producers, tending to maximise their profits, made the decision to adjust the quantities of commodities in their production plans to a given relationship. In order not to destroy the existed equilibrium, all producers had to follow the same procedure and the fixed trajectory of changes. Without special supervision and leadership, these conditions are difficult to realise in real economies.

This paper is an attempt to adapt the results obtained in (Lipieta 2010) to an economy with continuum traders. The motivation of this research task was as follows: in an economy with continuum traders, the non-participation of a finite number (even a very large) of producers in the adjustment process earlier presented did not disturb equilibrium, if it existed.

The paper consists of four parts. The next section presents the construction of the private ownership economy with continuum traders. The third part describes the economies with a reduced production or consumption sphere. The fourth and final part focuses on the structure of action to be taken in the economy with dynamic production.

2. Model

I shall begin by presenting a set of definitions that will be of use later. The linear space \mathbb{R}^ℓ , $\ell \in \{1, 2, \dots\}$, with the scalar product:

$$(x \circ y) = (x_1, x_2, \dots, x_\ell) \circ (y_1, y_2, \dots, y_\ell) = \sum_{k=1}^{\ell} x_k \cdot y_k$$

is interpreted as the ℓ – dimensional space of commodities and prices. The mapping:

$$proj_k: \mathbb{R}^\ell \ni (x_1, \dots, x_\ell) \rightarrow x_k \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

$k \in \{1, \dots, \ell\}$, is called the natural projection on the k -th coordinate.

Recall that if functions $f_1, \dots, f_k: D \rightarrow \mathbb{R}$ are Lebesgue integrable on D , where $D \subset \mathbb{R}$ is a Lebesgue measurable set, then function $f \stackrel{\text{def}}{=} (f_1, \dots, f_k): D \rightarrow \mathbb{R}^k$ of the form:

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x)) \text{ for } x \in D, \quad (2.2)$$

is Lebesgue integrable (compare to Aumann 1962). The integral of f , by (2.2), in the Lebesgue sense, is of the form:

$$\int_D f(x) d\mathcal{L}^1 \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_D f_1(x) d\mathcal{L}^1, \dots, \int_D f_k(x) d\mathcal{L}^1 \right).$$

The concept of the economy with continuum traders was introduced by R. Aumann. The basic assumptions and definitions of that model are presented below. According to Aumann's idea (see Aumann 1962), it is assumed that continuum of traders operate in \mathbb{R}^ℓ . We assume additionally that both the number of consumers and the number of producers are continuum. The set of consumers is interpreted as closed interval $[0, 1]$, which it is denoted by A . The sets of producers, denoted by B , is assumed to be the Lebesgue measurable subset of interval $[0, 1]$. Inclusion $B \subset A$ means that every producer is also a consumer, but not every consumer has to be a producer. The producers tend to maximise their profits and the consumers want to maximise their utilities on the budget sets. If there exists a price vector $p \in \mathbb{R}^\ell$ such that the agents manage to realise their tasks at price system p and the market clearing condition is satisfied, then such vector p is called the equilibrium price vector.

Feasible production plans $y^b \in \mathbb{R}^\ell$, of producer b , form the production set Y^b of producer b . The correspondence:

$$\delta: B \ni b \rightarrow Y^b \subset \mathbb{R}^\ell,$$

which to every producer b assigns production set $Y^b \subset \mathbb{R}^\ell$ of producer b is called the correspondence of production sets. We assume additionally (see Aumann 1962) that for every $s \in \{1, \dots, \ell\}$, each function of the form:

$$y_s: B \ni b \rightarrow y_s^b \in \text{proj}_s(Y^b) \subset \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

where $y^b = (y_1^b, \dots, y_\ell^b) \in \mathbb{R}^\ell$ is a production plan of producer b ($y^b \in Y^b$), is Lebesgue integrable on B .

Analogously to (Lipietz 2010), the following may be posited:

Definition 2.1. If for the given price vector $p \in \mathbb{R}^\ell$:

$$\forall b \in B: \eta^b(p) \stackrel{\text{def}}{=} \{y^{b*} \in Y^b: p \circ y^{b*} = \max\{p \circ y^b: y^b \in Y^b\}\} \neq \emptyset,$$

then:

– correspondence $\eta: B \ni b \rightarrow \eta^b(p) \subset Y^b$ which to every producer b assigns the set $\eta^b(p)$ of production plans maximising his profit at price system p , is called the correspondence of supply at price system p ,

– function $\pi: B \ni b \rightarrow \pi^b(p) = p \circ y^{b*} \in \mathbb{R}$ is the maximal profit function at price system p , where $y^{b*} \in \eta^b(p)$ for every $b \in B$.

Note that each function of the form:

$$B \ni b \rightarrow y^{b*} \in \eta^b(p),$$

for given $p \in \mathbb{R}^\ell$ is Lebesgue integrable on B (by the assumption of integrability of the functions of the form (2.1)). The vectors from set $\eta^b(p)$ will be called the optimal plans of producer b .

Definition 2.2. The two-range relational system:

$$P = (B, \mathbb{R}^\ell; \delta, p, \eta, \pi)$$

is called the production system.

Similarly, let:

– $\chi: A \ni a \rightarrow X^a \subset \mathbb{R}_+^\ell$ be a correspondence of consumption sets which to every consumer $a \in A$ assigns the consumption set X^a representing the consumer's feasible consumption plans with respect to his psycho-physical structure; it is assumed that for every $s \in \{1, \dots, \ell\}$, and $x^a \in X^a$ each function of the form:

$$x_s: A \ni a \rightarrow x_s^a \in \text{proj}_s(X^a) \subset \mathbb{R} \quad (2.4)$$

is Lebesgue integrable on A .

– $\Xi \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell$ be the family of all preference relations defined on the commodity space \mathbb{R}^ℓ ;

– $e: A \ni a \rightarrow e^a \in X^a$ be an initial endowment mapping, which to every consumer $a \in A$ assigns his initial endowment vector $e(a) \stackrel{\text{def}}{=} e^a \in X^a \subset \mathbb{R}^\ell$;

– $\varepsilon: A \ni a \rightarrow \varepsilon(a) \subset X^a \times X^a$ be a correspondence, which to every consumer $a \in A$ assigns $\varepsilon(a) \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^a$ a preference relation \preceq^a from the set Ξ , restricted to the consumption set X^a ;

– $p \in \mathbb{R}^\ell$ be a price vector.

Note that the expenditures of every consumer $a \in A$ cannot be greater than the value:

$$w^a = p \circ e(a). \quad (2.5)$$

The following definitions may be assumed on the basis of the above:

Definition 2.3. If for every $a \in A$ at given price vector $p \in \mathbb{R}^\ell$,

$$\begin{aligned} \beta^a(p, w^a) &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \chi(a): p \circ x \leq w^a\} \neq \emptyset \\ \xi^a(p, w^a) &\stackrel{\text{def}}{=} \{x^{a*} \in \beta(p, w^a) \mid \forall x^a \in \beta^a(p, w^a): x^a \preceq^a x^{a*}, \preceq^a \in \varepsilon^a\} \neq \emptyset, \end{aligned} \quad (2.6)$$

then:

– $\beta: A \ni a \rightarrow \beta^a(p, w^a) \subset \mathbb{R}^\ell$ is the correspondence of budget sets at given price system p , which to every consumer $a \in A$ assigns his set of budget constraints $\beta^a(p, w^a) \subset \chi(a)$ with the price system p and the initial endowment $e(a)$;

– $\xi: A \ni a \rightarrow \xi^a(p, w^a) \subset \mathbb{R}^\ell$ is the demand correspondence at given price system p , which to every consumer $a \in A$ assigns his consumption plans maximizing his preference on the budget set $\beta^a(p, w^a)$.

The vectors from set $\xi^a(p, w^a)$ will be called the optimal plans of consumer a .

Definition 2.4. The three-range relational system:

$$C = (A, \mathbb{R}^\ell, \Xi; \chi, e, \varepsilon, p, \beta, \xi)$$

is called the consumption system.

Let $p \in \mathbb{R}^\ell$ be a price vector, P – be a production system and C – a consumption system in the same space \mathbb{R}^ℓ . Let us assume that some consumers share in the producers' profits. If $\theta(a, b)$ indicates that part of the profit of producer b which is owned by consumer a , then $0 \leq \theta(a, b) \leq 1$. Moreover, the mapping $\theta: A \times B \rightarrow [0, 1]$ satisfies:

$$\forall b \in B: \sum_{a \in A} \theta(a, b) = 1 \tag{2.7}$$

and

$$\forall a \in A: \sum_{b \in B} \theta(a, b) \in \mathbb{R}.$$

In this situation the value w^a , ($a \in A$) in (2.5) is changed by the rule:

$$w^a = p \circ e(a) + \sum_{b \in B} \theta(a, b) \pi^b(p). \tag{2.8}$$

Let

$$\omega = \int_A e(a) d\mathcal{L}^1 \in \mathbb{R}^\ell \tag{2.9}$$

be the total endowment in economy E_p (the initial endowment mapping e , by assumption (2.4) is Lebesgue integrable on A). If for every $a \in A$ and w^a , given by (2.8), set $\xi^a(p, w^a) \neq \emptyset$ (see (2.6)), then the following definition is formulated:

Definition 2.5. The relational system:

$$E_p = (P, C, \theta, \omega)$$

is called the private ownership economy with continuum of traders.

The economy E_p operates as follows. Let a price vector $p \in \mathbb{R}^\ell$ be given. Every producer $b \in B$ chooses a production plan $y^{b*} \in \eta^b(p)$ maximising his profit at price system p . Hence, the mapping:

$$y: B \ni b \rightarrow y^{b*} \in \eta^b(p),$$

is specified. The vector:

$$y^* = \int_B y(b) d\mathcal{L}^1 \tag{2.10}$$

is called the equilibrium total production plan. The maximal profit of each producer is divided among all consumers according to function θ . Now the expenditures of every consumer $a \in A$ cannot be greater than value w^a calculated by (2.8). In this situation, every consumer a chooses his consumptions plan

$x^{a*} \in \xi^a(p, w^a) \subset X^a$ maximising his preference on the budget set $\beta^a(p, w^a)$. By the above, the mapping:

$$x: A \ni a \rightarrow x^{a*} \in \xi^a(p, w^a) \subset X^a$$

is specified. The vector:

$$x^* = \int_A x(a) d\mathcal{L}^1 \quad (2.11)$$

is called the equilibrium total consumption plan. If

$$x^* - y^* = \omega, \quad (2.12)$$

where ω is the total endowment in economy E_p (see (2.7)), then vector p is called the equilibrium price vector and is denoted by p^* . Consequently, the set

$$(\{x^{a*}\}_{a \in A}, \{y^{b*}\}_{b \in B}, p^*) \quad (2.13)$$

is called the state of Walras' equilibrium in economy E_p . It will be said that equilibrium exists in economy E_p , if condition (2.12) is satisfied for some set of form (2.13) with the total production plan of form (2.10) and the total consumption plan of form (2.11).

Remark 2.6. Let E_p be the private ownership economy with continuum traders in which condition (2.12) is satisfied and set (2.13) is the state of the Walras' equilibrium. Suppose that the producers from a set $\tilde{B} \subset B$ begin to realise other plans maximising their profits at given price system p . If \tilde{B} is the set of measure Lebesgue zero, then the equilibrium total production plan (see (2.10)) will remain unchanged. Consequently, condition (2.12) will be still satisfied in economy E_p . The same is applied to the consumers' plans.

3. Economy with a Reduced Consumption or Production Sphere

In this part of the paper, it is assumed that there exists a proper subspace $V \subset \mathbb{R}^\ell$ such that:

$$X^a \subset V \text{ for almost } a \in A. \quad (3.1)$$

Firstly, let us recall that it is said that the given property is satisfied "for almost $a \in A$ " if there exists a subset $\tilde{A} \subset A$ of measure Lebesgue zero, such that for every $a \in A \setminus \tilde{A}$ this property is true (set \tilde{A} can be empty). Secondly, if V is a subspace of dimension $\ell - k$ ($k \in \{1, \dots, \ell - 1\}$) of space \mathbb{R}^ℓ , then there exist linearly independent vectors $h^1, \dots, h^k \in \mathbb{R}^\ell$ ($h^s = (h_1^s, \dots, h_\ell^s)$, $s \in \{1, 2, \dots, k\}$) satisfying:

$$V = \bigcap_{s=1}^k \ker \tilde{h}^s, \quad (3.2)$$

where:

$$\tilde{h}^s: \mathbb{R}^\ell \ni x \rightarrow h_1^s x_1 + \dots + h_\ell^s x_\ell \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

are, for every $s \in \{1, 2, \dots, k\}$, the linear and continuous functions.

I will show that property (3.1) is often satisfied in real economies – specifically if at least one commodity is undesired by almost all consumers or if at least two commodities are complementary (see Lipieta 2010).

Precisely, if a commodity $j_0 \in \{1, \dots, \ell\}$ is undesired by consumers, then for almost $a \in A$ and every consumption plan $x^a \in X^a$:

$$x_{j_0}^a = 0.$$

Hence, for almost $a \in A$, $X^a \subset V = \ker \tilde{h}$, where \tilde{h} is of the form (3.3) with h defined by:

$$h = \begin{cases} 1 & \text{for } j = j_0 \\ 0 & \text{for } j \neq j_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

In this case, $V = \ker \tilde{h} = \mathbb{R}^{\ell-1}$. Generally (if there are exactly $\ell - k$ different undesired commodities), $V = \mathbb{R}^k$ for some $k \in \{1, \dots, \ell - 1\}$. If two commodities $j_1, j_2 \in \{1, \dots, \ell\}, j_1 \neq j_2$ are complementary then condition (3.1) is also satisfied for almost all consumption sets. Then, there exists $c > 0$ such that:

$$V = \{x \in \mathbb{R}^\ell: x_{j_1} = c \cdot x_{j_2}\}.$$

Hence $V = \ker \tilde{h}$, where $\tilde{h}: \mathbb{R}^\ell \ni x \rightarrow x_{j_1} - c \cdot x_{j_2} \in \mathbb{R}$ is the linear and continuous functional and consequently $V \neq \mathbb{R}^k$ for any $k \in \{1, \dots, \ell - 1\}$.

The economy E_p (see def. 2.5), in which condition (3.1) is satisfied for some subspace V of commodity-price space \mathbb{R}^ℓ , will be called the economy with a reduced consumption sphere.

Note that production sets Y^b ($b \in B$) sometimes satisfy condition:

$$Y^b \subset V \text{ for almost } b \in B. \quad (3.5)$$

Condition (3.5) can be satisfied, if the quantities of inputs or the quantities of outputs are proportional in production plans or if there is a commodity which for almost all producers is neither output nor input. Generally, production sets do not have to be contained in a subspace of commodity space \mathbb{R}^ℓ . The economy E_p (see def. 2.5), in which condition (3.5) is satisfied for some subspace V of commodity-price space \mathbb{R}^ℓ , will be called the economy with a reduced production sphere.

4. The Economy with a Dynamic Production System

The nonexistence of equilibrium in the real economies often leads to changes in the production sphere. Generally, if equilibrium exists, the producers do not

have incentives to change their production plans. However, in the spirit of perfect competition, the producers know about all properties of consumption plans. This knowledge, the desire to minimise losses and, in consequence, to earn more money may cause producers to decide, even equilibrium in the economy exists, to change the production sphere. Every change of the production sphere may lead to a disturbance of the equilibrium in a given economy.

The procedure for changing the production sphere without disturbing the equilibrium was elaborated (see Lipieta 2010) on the example of a private ownership economy in which all consumption sets were contained in a proper subspace of the commodity-price space. However, the assumption of the finite number (often very large) of agents implied that if at least one producer did not follow the established trajectory of changes of the production systems, then the equilibrium would be destroyed. In the economy with continuum traders this problem does not exist. Condition (2.12) is satisfied, even some (but not too many, see Remark 2.6) producers will not follow the established adjustment procedure (the set of producers whose trajectories of the change differ from the others should be of the measure Lebesgue zero). Below, the modifications of the production sphere which do not destroy the equilibrium at the given price system in the economy with continuum traders are presented.

Let $E_p = (P, C, \theta, \omega)$ be a private ownership economy with continuum traders (see def. 2.5), where condition (3.1) is satisfied. Hence the economy E_p is the economy with reduced consumption sphere. Suppose that subspace V by condition (3.1) is of dimension $\ell - k$ ($k \in \{1, \dots, \ell - 1\}$) and of the form (3.2) with linearly independent functionals $\tilde{h}^1, \dots, \tilde{h}^k$ satisfying (3.2). Let $q^1, \dots, q^k \in \mathbb{R}^\ell$ be a solution of the system of equations:

$$\tilde{h}^s(q^r) = \delta^{sr} \text{ for } s, r \in \{1, \dots, k\}, \quad (4.1)$$

where:

$$\delta^{sr} = \begin{cases} 1 & \text{if } s = r \\ 0 & \text{if } s \neq r \end{cases}$$

is Kronecker delta. Let mapping $\hat{Q}: \mathbb{R}^\ell \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ be of the form:

$$\hat{Q}(x, t) = x - t \cdot \sum_{s=1}^k \tilde{h}^s(x) \cdot q^s. \quad (4.2)$$

We say that vectors q^1, \dots, q^k assign the direction of mapping \hat{Q} . For a given $t \in [0, 1]$ and vectors $q^1, \dots, q^k \in \mathbb{R}^\ell$ satisfying (4.1) the mapping is defined as:

$$\hat{Q}_t: \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^\ell, \hat{Q}_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{Q}(x, t). \quad (4.3)$$

As before, we say that vectors $q^1, \dots, q^k \in \mathbb{R}^\ell$ assign the direction of mapping \hat{Q}_t . Note that the mapping \hat{Q}_t obtained by (4.2) with vectors $q^1, \dots, q^k \in \mathbb{R}^\ell$ satisfying

(4.1) is a unique one if and only if $k = \ell - 1$. If $k \in \{1, \dots, \ell - 2\}$ then the system of equalities (4.1) has more than one solution.

The mapping $Q: \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^\ell$, $Q(x) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{Q}_1(x) = \hat{Q}(x, 1)$ satisfying

$$Q(x) = x - \sum_{s=1}^k \tilde{h}^s(x) \cdot q^s \quad (4.4)$$

is the linear and continuous operator. Moreover

$$\forall x \in \mathbb{R}^\ell Q(x) \in V \text{ and } \forall v \in V Q(v) = v. \quad (4.5)$$

Note by (4.5) that mapping Q is the linear and continuous projection from \mathbb{R}^ℓ into V (see Cheney 1966). We also say that vectors q^1, \dots, q^k assign the direction of projection Q .

Note that if $p \notin V^T$, where subspace $V \subset \mathbb{R}^\ell$ is of the form (3.2), then the system of equalities

$$\begin{cases} \tilde{h}^s(x) = \delta^{sr} \\ p \circ x = 0 \end{cases} \quad s, r \in \{1, \dots, k\}, \quad (4.6)$$

for every $r \in \{1, \dots, k\}$ has a solution. We say that vectors $q^1, \dots, q^k \in \mathbb{R}^\ell$ satisfy assumption \mathcal{A} , if they satisfy condition (4.1) and additionally condition (4.6) if $p \notin V^T$.

Keeping the above assumptions and reasoning analogously as in the proof of theorem 4.2 in (Lipieta 2010), we determine the following to be true:

Theorem 4.1. Let E_p be an economy with continuum traders satisfying (3.1) with subspace $V \subset \mathbb{R}^\ell$. Let mapping $\hat{Q}: \mathbb{R}^\ell \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^\ell$, of the form (4.2), be assigned by vectors $q^1, \dots, q^k \in \mathbb{R}^\ell$ satisfying assumption \mathcal{A} . Then:

1) for every $b \in B$, if $y^{b*} \in \eta^b(p)$ then for every $t \in [0, 1]$, vector $\hat{Q}(y^{b*}, t)$ maximises, at price p , the profit of producer b on the modified production set:

$$\hat{Q}(Y^b, t) = \{\hat{Q}(y^b, t) \in \mathbb{R}^\ell : y^b \in Y^b\};$$

2) for every $a \in A$, if $x^{a*} \in \xi^a(p, w^a)$, then x^{a*} maximises, at price p , the preference of consumer a on the set:

$$\left\{ x \in X^a : p \circ x \leq p \circ e^a + \sum_{b \in B} \theta(a, b) \cdot (p \circ \hat{Q}(y^{b*}, t)) \right\}.$$

Consider $t \in [0, 1]$ and mapping \hat{Q}_t , of the form (4.3) assigned by vectors $q^1, \dots, q^k \in \mathbb{R}^\ell$, satisfying assumption \mathcal{A} . Theorem 4.1 guarantees that the images of the optimal plans of every producer b by mapping \hat{Q}_t , maximise at the same price system, the profit of every producer b on the modified production set:

$$\hat{Q}_t(Y^b) = \{\hat{Q}(y^b, t) \in \mathbb{R}^\ell : y^b \in Y^b\}.$$

Let vectors $q^1, \dots, q^k \in \mathbb{R}^\ell$ satisfy assumption \mathcal{A} and $t \in [0, 1]$. We now introduce:

Definition 4.2. The two-range relational system:

$$P_t(q^1, \dots, q^k) = (B, \mathbb{R}^\ell, \delta_t, p, \eta_t, \pi_t), \quad (4.7)$$

where:

- $\delta_t: B \ni b \rightarrow \hat{Q}_t(Y^b) \subset \mathbb{R}^\ell$ is the correspondence of production sets, which to every producer $b \in B$ assigns the image of production set Y^b by mapping \hat{Q}_t ;
- $p = p^* \in \mathbb{R}^\ell$ is the price vector in the private ownership economy E_p ;
- $\eta_t: B \ni b \rightarrow \eta_t^b(p) \subset \mathbb{R}^\ell$ is the correspondence of supply, which to every producer $b \in B$ assigns set $\eta_t^b(p)$ of production plans maximising his profit at the price system p on the set $\hat{Q}_t(Y^b)$, where:

$$\forall b \in B \eta_t^b(p) \stackrel{\text{def}}{=} \{\hat{Q}_t(y^{b*}): p \circ y^{b*} = \max\{p \circ y^b: y^b \in Y^b\}\}.$$

Note that:

$$\forall b \in B \eta_t^b(p) = \{\hat{Q}_t(y^{b*}): p \circ \hat{Q}_t(y^{b*}) = \max\{p \circ \hat{Q}_t(y^b): y^b \in Y^B\}\};$$

- $\pi_t: B \ni b \rightarrow p \circ \hat{Q}_t(y^{b*}) \in \mathbb{R}$ is the maximal profit function and $y^{b*} \in \eta_t^b(p)$ for every $b \in B$,

is the evolution of production system $P = (B, \mathbb{R}^\ell; \delta, p, \eta, \pi)$ (by def. 2.2) at time t , on the trajectory assigned by vectors q^1, \dots, q^k .

Note further that the relational system $P_t(q^1, \dots, q^k)$ is the production system in the meaning of definition 2.2. Moreover, the production system $P_t(q^1, \dots, q^k)$, besides price system p , is the image of production system P of economy E_p , by the mapping \hat{Q}_t of the form (4.3). If $t = 1$, then the production system P takes the final position, namely $P_1(q^1, \dots, q^k)$, in which all production sets are contained in subspace V (as the images of production sets by initial production system P by projection \hat{Q}_1).

Consider vectors $q^1, \dots, q^k \in \mathbb{R}^\ell$ satisfying assumption \mathcal{A} . Definition 4.2 directly leads to:

Definition 4.3. Let $t \in [0, 1]$ and the mapping \hat{Q}_t of form (4.6) in the direction of vectors $q^1, \dots, q^k \in \mathbb{R}^\ell$ be given. The relational system:

$$E_t(q^1, \dots, q^k) = (P_t(q^1, \dots, q^k), C, \theta, \omega), \quad (4.8)$$

where:

- $P_t(q^1, \dots, q^k)$ is given by (4.7),
- C is the consumption system contained by assumption (3.1), besides the price system, which may be, but is not necessarily, in subspace V ,

will be called the evolution of the private ownership economy E_p at time t in the direction of vectors $q^1, \dots, q^k \in \mathbb{R}^\ell$.

Note that the relational system $E_t(q^1, \dots, q^k)$ is the private ownership economy with continuum of traders in the meaning of definition 2.5. As the result of the

evolution of the production system, assigned by vectors $q^1, \dots, q^k \in \mathbb{R}^\ell$, we get the private ownership economy with continuum of traders $E_t(q^1, \dots, q^k)$ with reduced consumption and production spheres.

Now we have:

Lemma 4.4. Let $t \in [0, 1]$ and mapping \hat{Q}_t of form (4.2) be assigned by vectors $q^1, \dots, q^k \in \mathbb{R}^\ell$ satisfying assumption \mathcal{A} . If the set:

$$(\{x^{a*}\}_{a \in A}, \{y^{b*}\}_{b \in B}, p^*) \quad (4.9)$$

(see (2.13)) is the state of Walras equilibrium in economy E_p then set:

$$(\{x^{a*}\}_{a \in A}, \{\hat{Q}_t(y^{b*})\}_{b \in B}, p^*) \quad (4.10)$$

will be the state of Walras equilibrium in economy $E_t(q^1, \dots, q^k)$.

Proof. The proof is the immediate consequence of theorem 4.1.

Suppose that private ownership economy with continuum traders E_p , satisfying condition (3.1) with subspace $V \subset \mathbb{R}^\ell$, is in equilibrium at price vector $p \in \mathbb{R}^\ell$. If vectors $q^1, \dots, q^k \in \mathbb{R}^\ell$ satisfy assumption \mathcal{A} , then economy $E_t(q^1, \dots, q^k)$, defined in (4.8), also has an equilibrium at price vector p . By given equilibrium price vector $p^* = p$, maximal profits of every producer b are constant in every economy $E_t(q^1, \dots, q^k)$, $t \in [0, 1]$. This means that for every $b \in B$:

$$\forall t \in [0, 1] \pi_t(b) = \pi(b).$$

Let $t \in [0, 1]$ and vectors $q^1, \dots, q^k \in \mathbb{R}^\ell$ satisfy assumption \mathcal{A} . The set of economies $\{E_t(q^1, \dots, q^k), t \in [0, 1]\}$ can be used to analytically describe the process of moving economy $E_p = E_0(q^1, \dots, q^k)$ towards economy $E_1(q^1, \dots, q^k)$. Theorem 4.1 guarantees the existence of equilibrium in every economy $E_t(q^1, \dots, q^k)$, $t \in [0, 1]$, if it exists in initial economy $E_0(q^1, \dots, q^k)$. This motion can be interpreted as the producers' reply for the dependency between the quantities of commodities in consumers' plans. On the other hand, it also leads to a simplification of the geometric structure of economy E_p because economy $E_1(q^1, \dots, q^k)$ has reduced production and consumptions spheres. Further note that if $k = \ell - 1$, then the system of equations (4.1) has only one solution. Hence, then, there is only one trajectory of the changing production sphere, defined by mapping \hat{Q} of the form (4.2), which does not destroy the equilibrium in every economy $E_t(q^1, \dots, q^k)$, $t \in [0, 1]$. If $k \in \{1, \dots, \ell - 2\}$ then the system of equalities (4.1) has more than one solution. This means that there are infinite paths (namely mappings \hat{Q}) to reach the final position $P_1(q^1, \dots, q^k)$, which is the reduced form of production system and consequently the economy $E_1(q^1, \dots, q^k)$ with reduced production and consumptions spheres.

I will now discuss the structure of the modification of the production sphere in private ownership economy E_p with continuum traders. The producers know that all consumption sets are contained in subspace $V \subset \mathbb{R}^\ell$. If producers realise the production plans, satisfying the dependency between quantities of commodities seen in consumption plans, then they could bring about the nonexistence of the surplus outputs. This reasoning compels the producers to adjust their activities to offer production plans that precisely fit consumers' requirements (meaning plans from subspace V). Every producer will change his production plans regardless of other producers, moreover each producer should conduct alterations according to a fixed recipe – the trajectory of changes, assigned by one of the mappings of the form (4.2). Hence, it seems that the procedure for changing the production system without destroying equilibrium in the economy requires action from an institution or person (below called the designer) guiding this process to achieve the desired goals. Firstly, the designer should establish when the adjustment process will begin and finish and which trajectory of the changing (precisely speaking: which vectors $q^1, \dots, q^k \in \mathbb{R}^\ell$ satisfying assumption \mathcal{A}) to choose. Finally, production system $P_0(q^1, \dots, q^k)$ will be changed to (production) system $P_1(q^1, \dots, q^k)$ (see (4.7)) and the modification of the production system will be finished at (ending) point $t = 1$ common for all producers. During this process, economy $E_t(q^1, \dots, q^k)$, interpreted as the state of economy $E_0(q^1, \dots, q^k)$ at point t , remains in equilibrium at every point $t \in [0, 1]$. If some producers from the subset of B , of measure Lebesgue zero, do not follow the procedure, at arbitrary point t , then the economy remains in equilibrium at this point t .

The following scenario is also possible: almost all producers who decided to change their production plans chose the same trajectory of changes (mapping \hat{Q} of the form (4.2)), because of the nature of the process or the nature of the (complementary or undesired) commodities. If even the producers start the procedure of changing not in the same point of time, then, after almost all of the producers have finished the adjustment process, the economy will gain the equilibrium. This follows from the form of mapping \hat{Q} (see (4.2)). So, in this case, there is no designer and the producers' activity is caused by competitive mechanism.

5. Conclusion

The idea of an economy with continuum traders and a reduced consumption sphere makes it possible to model the evolution of the production sphere without losing equilibrium. Moreover, if “a small” number of producers do not take part in the process, the equilibrium will not be disturbed. This reflects the situation seen in real economies, where some producers do not follow the general tendency of

changes and the economy remains in equilibrium. It is not possible to model such a situation in a Debreu private ownership economy.

Bibliography

- Aumann R. J. (1962), *Market with a Continuum of Traders I–IV*, Economic Research Program, Princeton University Press, RM.
- Aumann R. J. (1966), *Existence of Competitive Equilibria in Markets with a Continuum of Traders*, “Econometrica”, vol. 34, <http://dx.doi.org/10.2307/1909854>.
- Aliprantis C. D. (1966), *Problems in Equilibrium Theory*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, Germany.
- Cheney E. W. (1966), *Introduction to Approximation Theory*, McGraw Hill, New York.
- Debreu G. (1959), *Theory of Value*, New York, Wiley.
- Debreu G. (1982), *Existence of Competitive Equilibrium* (in:) K. J. Arrow, M. D. Intriligator (eds), *Handbook of Mathematical Economics*, vol. 3, North-Holland, Amsterdam.
- Lipieta A. (2010), *The Debreu Private Ownership Economy with Complementary Commodities and Prices*, “Economic Modelling”, vol. 27: 22–27, <http://dx.doi.org/10.1016/j.econmod.2009.07.005>.
- Lipieta A. (2012), *The Economy with Production and Consumption Systems Changing in Time*, “Przegląd Statystyczny”, vol. LIX, nr 3.
- Magill M., Quinzii M. (2002), *Theory of Incomplete Markets*, MIT Press, Cambridge.
- Radner R. (1970), *Existence of Equilibrium of Plans, Prices and Price Expectations in a Sequence of Markets*, “Econometrica”, vol. 40.

Zmiana produkcji na rynku z nieskończoną liczbą agentów

(Streszczenie)

W pracy rozważono ekonomię Debreu z własnością prywatną, w której wszystkie zbiory konsumpcji są zawarte we właściwej podprzestrzeni przestrzeni towarów i cen. Ta własność motywuje producentów do zmiany uwidaczniającej się w realizacji planów z tej samej podprzestrzeni działalności na rynkach. Zmiany w procesie produkcji wymagają czasu, stąd w modelowaniu zmian w sektorze produkcji należy użyć zmiennej czasowej.

W odróżnieniu od wyników otrzymanych przez autorkę we wcześniejszych badaniach (2010), w ekonomii z nieskończoną liczbą agentów wykluczenie skończonej liczby producentów z procesów transformacyjnych nie zaburza równowagi. Celem artykułu jest prezentacja trajektorii zmian działalności producentów w ekonomii z nieskończoną liczbą agentów, w wyniku których otrzymujemy ekonomię zredukowaną do pewnej podprzestrzeni przestrzeni towarów i cen. Wynikiem jest układ ekonomii w równowadze zależnych od czasu.

Słowa kluczowe: ekonomia z nieskończoną liczbą agentów, zredukowany system konsumpcji, ciągła trajektoria zmian, projekcje.

Zofia Mielecka-Kubień

Józef Biolik

Katarzyna Warzecha

Andrzej Wójcik

Katedra Ekonometrii

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Wybrane aspekty społeczno- -ekonomicznych skutków uzależnienia od hazardu

Streszczenie

Celem przeprowadzonych badań jest ocena wielkości skutków uzależnień od hazardu na podstawie badań ankietowych przeprowadzonych wśród pacjentów ośrodków leczenia uzależnienia od hazardu. Badania ankietowe zostały przeprowadzone w okresie marzec-wrzesień 2013 r. Wyniki badania wskazują, że w Polsce, podobnie jak w innych krajach, uzależnienie od hazardu powoduje wiele negatywnych konsekwencji zdrowotnych, społecznych i ekonomicznych dla osób dotkniętych tym uzależnieniem oraz dla ich rodzin, a skutki niematerialne i koszty spowodowane uzależnieniem od hazardu są znaczne.

Słowa kluczowe: hazard, koszty finansowe, koszty społeczne, podejście indywidualne.

1. Wprowadzenie

Według Światowej Organizacji Zdrowia (WHO) uzależnianie to psychiczny i fizyczny stan wynikający z interakcji między żywym organizmem a substancją chemiczną (np. alkoholem, narkotykami, nikotyną, lekami) charakteryzujący się zmianami i innymi reakcjami, jak: konieczność przyjmowania danej substancji

w sposób ciągły lub okresowy w celu doświadczenia jej wpływu na psychikę lub by uniknąć objawów towarzyszących brakowi substancji [Augustynek 2011, s. 18].

Wśród uzależnień można wyróżnić uzależnienia behawioralne, które rozwijają się po wielokrotnym powtarzaniu określonych czynności. Charakteryzują się one silną potrzebą powtarzania tych czynności, trudnościami z kontrolowaniem ich wykonywania, uporczywym powtarzaniem pomimo szkodliwych następstw, przedkładaniem tych zachowań ponad inne zajęcia i zobowiązania, a także występowaniem zespołu przykrych objawów (rozdrażnienie, złość, agresja itp.) w sytuacjach utrudniających lub uniemożliwiających realizowanie tych zachowań. Najczęściej spotykane uzależnienia behawioralne to: patologiczny hazard, pracoholizm, zakupoholizm, seksoholizm oraz uzależnienie od komputera i Internetu.

Niniejsza praca poświęcona jest patologicznemu hazardowi. Z prowadzonych badań wynika, że zarówno skutki niematerialne, jak i materialne spowodowane uzależnieniem od hazardu problemowego i patologicznego są znaczne dla osób dotkniętych uzależnieniem i ich otoczenia, jak również dla społeczeństwa. Warto zaznaczyć, że w ostatnich kilkudziesięciu latach problemy te w różnych krajach świata były często rozważane w literaturze naukowej oraz na konferencjach naukowych. Istnieją też specjalne wydawnictwa naukowe im poświęcone, np. „Journal of Gambling Studies”, „International Gambling Studies”.

W Polsce problem oceny wielkości skutków i kosztów hazardu patologicznego i problemowego jest rzadko poruszany¹. Z uwagi na to, że szybko wzrasta liczba osób uzależnionych od hazardu, wzrastają także koszty i wielkość innych skutków ich zachowań. Powoduje to potrzebę oceny konsekwencji uprawiania hazardu dla osób uzależnionych i dla ich otoczenia.

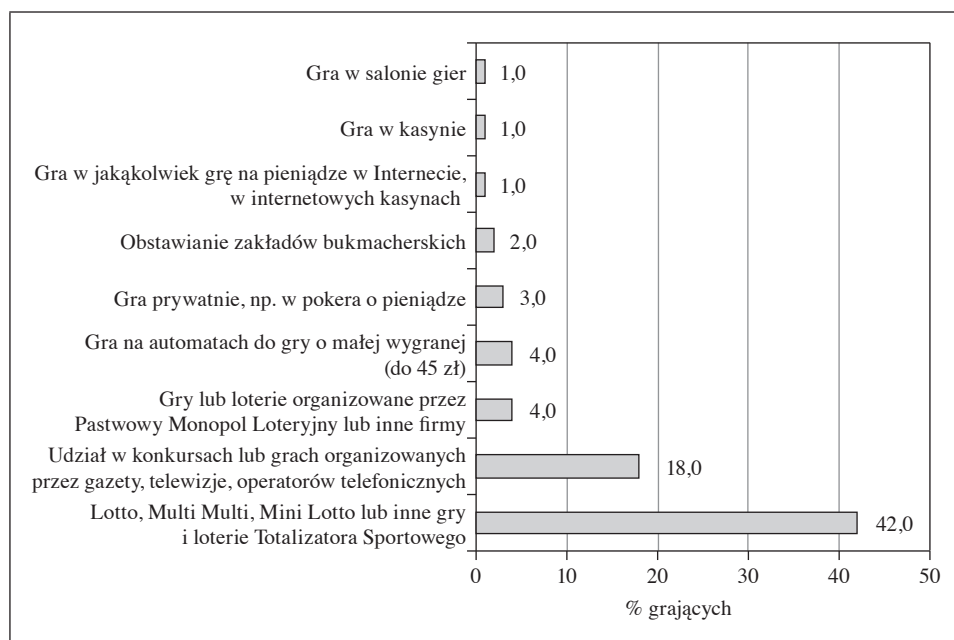
Słowo hazard wywodzi się z języka arabskiego i oznacza kostkę do gry lub grę w kości. Cechą charakterystyczną gier hazardowych jest to, że mają charakter losowy, tzn. ich wynik nie jest możliwy do przewidzenia i jednocześnie nie istnieją żadne strategie (sposoby) umożliwiające uzyskanie lepszych wyników bez złamania zasad gry.

Patologiczny hazard (hazard przymusowy) został uwzględniony w ICD – X – rozdział piąty *Zaburzenia psychiczne i zaburzenia zachowania*, w podrozdziale *Zaburzenia nawyków i popędów* i zdefiniowany w następujący sposób: „Hazard jest to zaburzenie, które polega na często powtarzającym się uprawianiu hazardu, który przeważa w życiu człowieka ze szkodą dla zobowiązań społecznych, zawodowych, materialnych i rodzinnych” [Augustynek 2011, s. 65].

¹ W polskiej literaturze Zjawisko hazardu jest opisywane. Warto zwrócić uwagę na monografię [Derwich-Nowak 2010].

W Polsce uprawia się różne rodzaje hazardu [Augustynek 2011, s. 64]², m.in.: gry w kasynie (ruletka, gry w karty – głównie poker i *blackjack*, gry w kości, gry na automatach), gry liczbowe – bingo, totolotek, loterie (zwłaszcza telefoniczne), zdraпки, zakłady bukmacherskie, sportowe – wyścigi konne i wyścigi psów, automaty do gry, gry internetowe czy spekulacje giełdowe.

Według badania CBOS z 2011 r.³ (rys. 1) najbardziej popularne wśród Polaków były w tym czasie: gra w Lotto, Multi Multi, Mini Lotto lub inne gry i loterie Totalizatora Sportowego oraz udział w konkursach lub grach organizowanych przez gazety, telewizje, operatorów telefonicznych itp. (telefon lub esemes).



Rys. 1. Rodzaje hazardu uprawiane w Polsce w 2011 r. według CBOS

Źródło: opracowanie własne na podstawie: [Polak w szponach... 2011].

Celem prezentowanego badania jest ocena materialnych i niematerialnych skutków uprawiania hazardu dla osób od niego uzależnionych. Przypuszcza się, że oprócz skutków finansowych osoby uzależnione od hazardu doświadczają negatywnych konsekwencji uprawiania hazardu również w innych sferach życia.

² W Europie na gry hazardowe najwięcej wydają Francuzi (2,5 mld euro rocznie), w dalszej kolejności – Niemcy i Brytyjczycy (po około 1 mld euro).

³ Sposób przeprowadzenia tego badania i otrzymane wyniki są szczegółowo opisane w: [Polak w szponach... 2011].

Można także przypuścić, że nie wszystkie rodzaje gier w jednakowym stopniu powodują zagrożenie uzależnienia się od hazardu.

2. Uwagi o metodzie badania

Oceny skutków problemowego i patologicznego uprawiania hazardu można dokonać z punktu widzenia:

- osoby uzależnionej (skutki indywidualne) i jej otoczenia,
- pracodawcy osoby uzależnionej,
- lokalnych społeczności miejsc, gdzie uprawiany jest hazard,
- budżetu państwa i całego społeczeństwa (skutki społeczne).

Opisywane badanie prowadzone było z punktu widzenia osób uzależnionych od hazardu (skutki indywidualne)⁴. Wykorzystanym narzędziem był liczący 15 stron kwestionariusz ankietowy obejmujący różne rodzaje możliwych negatywnych konsekwencji uprawiania hazardu, zarówno tych o charakterze materialnym, jak i niematerialnym. Pytania zostały podzielone na trzy części (I, II i III) oraz siedem podgrup, oznaczonych literami alfabetu (od A do G). Celem pytań stawianych w części I A było poznanie historii uzależnienia od hazardu pacjenta. Część II pytań dotyczyła różnych skutków uprawiania hazardu: część II B – skutków w zakresie wykształcenia i przebiegu pracy zawodowej, część II C skutków dla sytuacji rodzinnej hazardzisty, część II D dotyczyła skutków zdrowotnych. Część II E była kluczowa ze względu na cel badania, obejmowała ona bowiem pytania dotyczące skutków finansowych uprawiania hazardu, a pytania zawarte w części II F dotyczyły skutków prawnych uprawiania hazardu. W części II G proszono respondentów o podsumowanie negatywnych konsekwencji uprawiania hazardu i ocenę możliwości ich naprawy. Część III zawierała pytania o płeć, wiek i miejsce zamieszkania respondenta.

Ankieta była ankietą imienną dla terapeutów, którzy wywiady przeprowadzali, natomiast zespół z Uniwersytetu Ekonomicznego otrzymał ankiety, w których dane osobowe pacjentów były zaszyfrowane – kod znany był tylko terapeutom przeprowadzających wywiady.

Respondentami byli przypadkowo dobrani pacjenci ośrodków terapii uzależnień od hazardu w całym kraju, a wywiady ankietowe przeprowadzane były przez terapeutów zatrudnionych w tych ośrodkach. Przeprowadzono 228 wywiadów

⁴ Badanie to zostało przeprowadzone w latach 2012–2013 przez zespół Katedry Ekonometrii Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach pod kierunkiem Zofii Mieleckiej-Kubieñ w ramach grantu Ministra Zdrowia pt.: *Wspieranie badań naukowych dotyczących zjawiska uzależnienia od hazardu lub innych uzależnień niestanowiących uzależnienia od substancji psychoaktywnych, a także rozwiązywania problemów z tym związanych* (maszynopis).

ankietowych. W projektowaniu badania, którego wyniki zostały zaprezentowane w niniejszej pracy, wykorzystano kwestionariusze i wyniki badań prowadzonych w innych krajach, a w szczególności uwagi zawarte w: [Abbott i in. 2004, Blaszczyński i in. 2006, Collins i Lapsley 2003, Eadington 2003, Grinols 2007, Hawke 2000, Hayward i Colman 2004, Ladouceur i in. 1994, Schwer, Thompson i Nakamuro 2003, Single 2007, Volberg 1993, Walker i Barnett 1999].

Niżej omówione zostaną wybrane wyniki przeprowadzonego badania – pełny ich opis zawarty został w raporcie z badania [Mielecka-Kubień i in. 2013].

3. Skutki uprawiania hazardu dla osób uzależnionych (podejście indywidualne)

Większość badanych respondentów stanowili mężczyźni – ok. 92%. Ankietowani najczęściej byli w wieku między 34 a 43 rokiem życia. W tym przedziale wiekowym znajduje się ponad 35% badanych osób. Głównym miejscem zamieszkania ankietowanych było duże miasto (powyżej 100 tys. mieszkańców), gdzie zamieszkiwało prawie 54% badanych hazardzistów. W miastach od 10 tys. do 100 tys. mieszkańców zamieszkiwało ok. 28% ankietowanych, a w małych miastach, poniżej 10 tys. mieszkańców – tylko 7% badanych osób. Mieszkańcami wsi było 12% badanych osób.

W tabeli 1 przedstawiono profil typowego hazardzisty, przy konstrukcji którego brano pod uwagę wielkości najczęściej występujące w odpowiedziach na pytania ankiety. Dla zmiennych o charakterze finansowym uwzględniono wartości przeciętne, przy czym ze względu na istnienie obserwacji odstających wnioskowano na podstawie mediany (która z reguły była niższa niż średnia arytmetyczna).

Na rys. 2 przedstawiono udziały respondentów, którzy kiedykolwiek w swoim życiu grali w gry hazardowe. Okazało się, że zdecydowanie najwięcej spośród badanych osób grało na automatach. Na taki wynik wpływa zapewne dostępność do automatów (jeszcze do niedawna automaty do gry o pieniądze były w prawie wszystkich pubach, obecnie maszyny przeniesiono do specjalnych lokali, ale jest ich tak dużo, że nie ma problemu z ich znalezieniem, zwłaszcza w miastach). Spośród badanych na automatach grało 72% badanych osób, a w gry liczbowe lub zakłady pieniężne 58% ankietowanych. Na kolejnych miejscach wśród najpopularniejszych gier hazardowych znajdują się: gra w kasynie (43% ankietowanych), sportowe zakłady bukmacherskie (39%), karty (35%) oraz gry przez Internet (28%). W pozostałych grach uczestniczyło mniej niż 20% badanych osób.

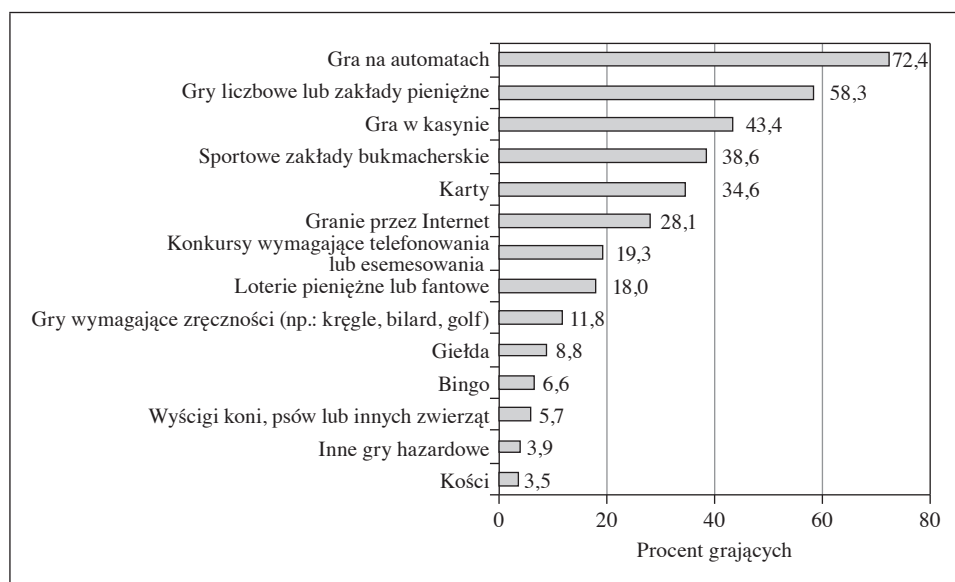
Tabela 1. Profil typowego hazardzisty

Lp.	Cecha	Opis
1	Płeć	Mężczyzna
2	Wiek	34–43 lata
3	Miejsce zamieszkania	Miasto powyżej 100 tys. mieszkańców
4	Wykształcenie	Średnie
5	Status zawodowy	Zatrudniony na stałe
6	Stan cywilny	Żonaty
7	Rodzaj gry	Najczęściej gra na automatach, w dalszej kolejności w gry losowe – lotto i zakłady pieniężne
8	Powód rozpoczęcia grania	Dla pieniędzy, dla rozrywki, dla zabicia nudy
9	Powód coraz częstszego grania	Dla większych wygranych, dla chęci odegrana się
10	Powód grania pomimo narastających problemów	Chęć odegrania się, nadzieja i marzenie o wielkiej wygranej
11	Największe kwoty stawiane jednorazowo (mediana)	Kwoty w wysokości 500 zł stawiane jednorazowo, na automatach, w kasynie i na giełdzie
12	Kwota wydawana miesięcznie na hazard w roku podjęcia terapii (mediana)	2000 zł
12	Skutki finansowe uprawiania hazardu	Zadłużenia u przyjaciół i znajomych oraz branie pożyczek bez wiedzy i zgody najbliższych
13	Miesięczna liczba godzin poświęcana na hazard w roku podjęcia terapii (mediana)	40 godzin miesięcznie
14	Długi finansowe w roku podjęcia terapii (mediana)	30 000 zł
15	Skutki zdrowotne uprawiania hazardu	Obniżenie nastroju, stany rozdrażnienia, stany niepokoju i lęku
16	Skutki rodzinne	Narastające konflikty lub izolacja w relacjach z rodziną, narażenie bliskich na stres i zamartwianie się, utrata rodziny

Źródło: opracowanie własne.

W tabeli 2 podano średnią, medianę, wartość minimalną i maksymalną oraz współczynnik zmienności średniej kwoty wydawanej jednorazowo na hazard. Bez dwóch skrajnych odpowiedzi (podane kwoty były nieprawdopodobne) średnio najwięcej respondenci wydawali jednorazowo na grę na giełdzie (2894,6 zł) oraz

w kasynach gry (960,8 zł), a największe jednorazowe wydatki ponoszono w grach na automatach oraz na giełdzie – 15 tys. zł. Mediana jednorazowych wydatków na gry hazardowe na giełdzie, w kasynie i na automatach wynosiła 500 zł, co oznacza, że połowa respondentów wydawała na te cele 500 zł lub mniej, a połowa 500 zł lub więcej.



Rys. 2. Respondenci według rodzaju uprawianego hazardu (w %)

Źródło: opracowanie własne.

Następne co do wielkości kwoty wydawane jednorazowo dotyczyły zakładów zawieranych za pośrednictwem Internetu (200 zł), bingo (150 zł) oraz gry w karty, w kości, sportowych zakładów bukmacherskich oraz w innych grach hazardowych (po 100 zł).

Głównym powodem, dla którego ankietowani rozpoczęli swój kontakt z hazardem (rys. 3) była chęć zarobienia „łatwych” pieniędzy – ok. 26% badanych podało właśnie ten powód rozpoczęcia gry na pieniądze. Trochę rzadziej (24%) ankietowani podawali, że rozpoczęli granie, aby zabić nudę, chcieli się rozzerwać. Jeszcze rzadziej (20%) powodem pierwszych kontaktów z hazardem byli znajomi, przyjaciele, czasami rodzina, którzy namówili respondentów na grę. Niecałe 13% badanych przyznało, że zagraли po raz pierwszy z ciekawości. Pozostałe powody były wymieniane przez 3% lub mniej ankietowanych.

W dalszej części kwestionariusza respondentów proszono o opisanie historii uzależnienia od początku ich kontaktów z grami hazardowymi, biorąc pod uwagę

ilość pieniędzy wydawanych oraz długi związane z grami hazardowymi – informacje te zostały przedstawione na rys. 4–8. Wzięto tu pod uwagę cztery ostatnie lata przed podjęciem terapii oraz rok, w którym respondent podjął terapię.

Tabela 2. Respondenci według średnich jednorazowych wydatków na gry hazardowe

Gra hazardowa	Średnia (zł)	Mediana (zł)	Wartość (zł)		Współczynnik zmienności
			minimalna	maksymalna	
Karty ^a	217,5	100	2	1 500	1,3
Kości	80,0	100	20	100	0,5
W kasynie	960,8	500	10	12 000	1,7
Gry liczbowe lub zakłady pieniężne	99,1	20	2	3 000	3,5
Wyścigi koni, psów lub innych zwierząt	237,8	65	2	1 000	1,4
Gra na automatach ^a	828,6	500	10	15 000	2,2
Bingo	276,7	150	10	1 500	1,5
Giełda	2 894,6	500	75	15 000	1,6
Granie przez Internet	787,6	200	5	10 000	2,1
Sportowe zakłady bukmacherskie	277,0	100	2	3 000	1,5
Gry wymagające zręczności (np.: kręgle, bilard, golf)	155,2	50	5	1 200	1,9
Loterie pieniężne lub fantowe	26,1	10	2	300	2,0
Konkursy wymagające telefonowania lub esemesowania	56,3	10	2	1 000	3,1
Inne gry hazardowe ^b	281,0	100	2	12 500	1,6

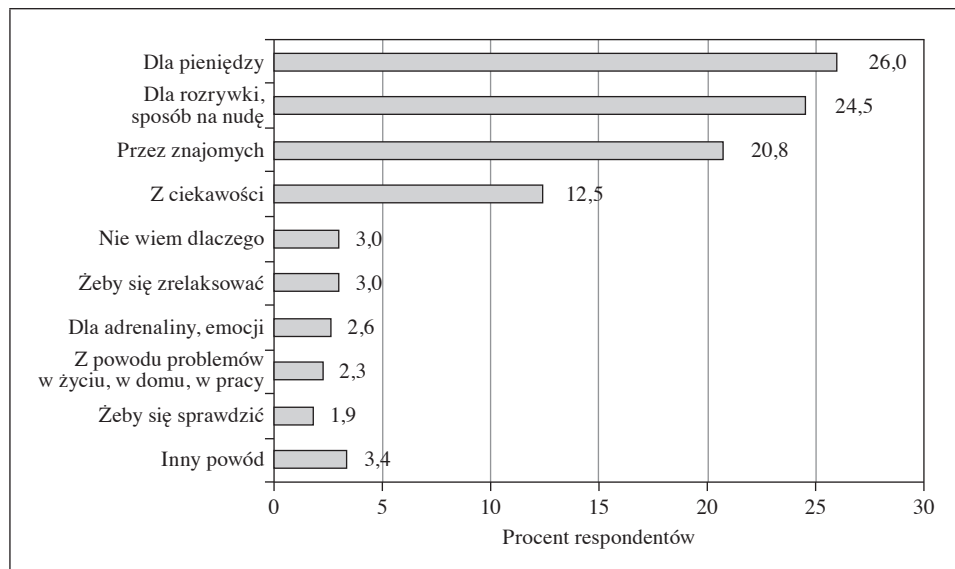
^a – bez respondenta nr 24, ^b – bez respondenta nr 20.

Źródło: obliczenia własne.

Okazało się, że cztery lata przed podjęciem terapii wśród 193 ankietowanych, którzy prawidłowo odpowiedzieli na pytanie tylko 119 uprawiało hazard, trzy lata przed podjęciem terapii było ich 147, dwa lata – 158, na rok – 165, a w roku, w którym podjęli się leczenia było ich 193.

Respondenci z roku na rok wydawali coraz większe kwoty (rys. 4). Cztery i trzy lata przed podjęciem terapii połowa grających wydawała na hazard miesięcznie 1000 zł i więcej, dwa lata przed podjęciem terapii było to już 1500 zł, a rok przed podjęciem terapii i w roku, w którym ankietowani podjęli terapię, kwota ta wzrosła do 2000 zł. Rosła także maksymalna kwota miesięcznych wydatków

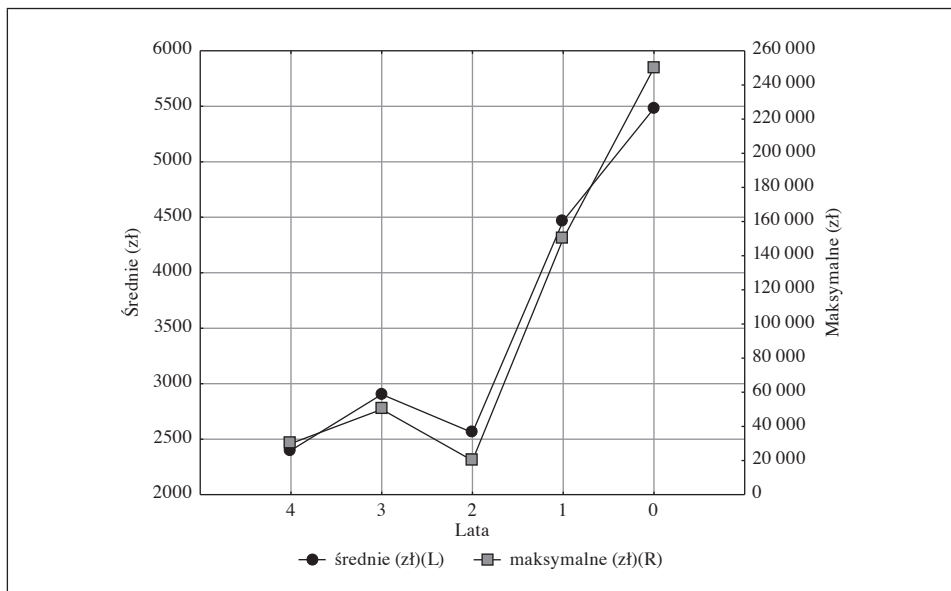
na hazard – cztery lata przed podjęciem terapii kwota ta wynosiła 30 tys. złotych, rok przed podjęciem terapii 150 tys. złotych, natomiast w roku podjęcia terapii wydano na ten cel 250 tys. zł (rys. 4). Poziom tych wydatków był jednak bardzo zróżnicowany tym bardziej, im bliżej było do podjęcia terapii. Świadczą o tym zmiany wartości współczynnika zmienności – od 1,7 cztery lata przed podjęciem terapii do 3,6 w roku podjęcia terapii, wzrost ponaddwukrotny.



Rys. 3. Rozkład respondentów według przyczyn rozpoczęcia uprawiania hazardu (w %)
 Źródło: opracowanie własne.

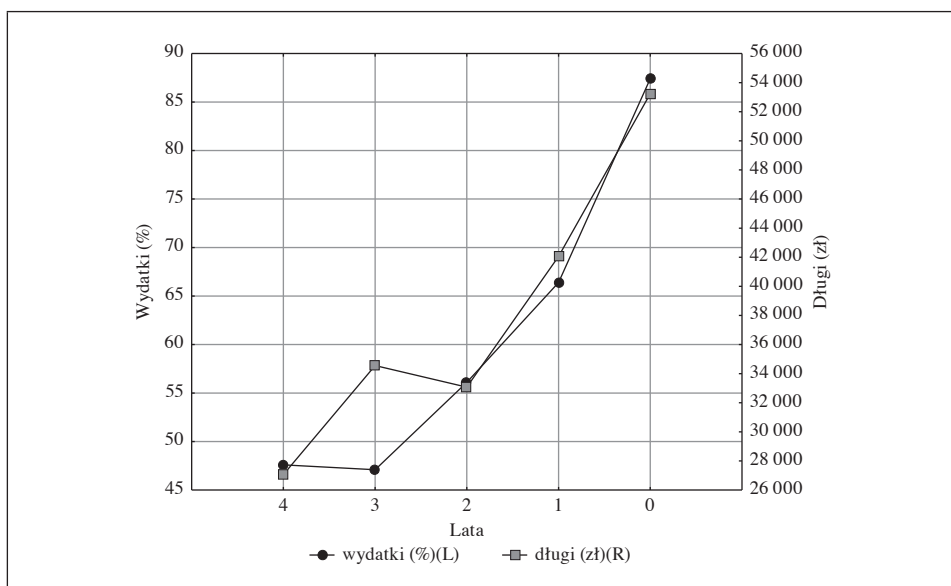
Uzależnienie od hazardu prowadzi bardzo często do powstania długów. Rys. 4 ilustruje zadłużenie ankietowanych związane z hazardem, a rys. 5 średni udział wydatków (%) na hazard w dochodach respondentów.

Długi związane z hazardem (rys. 5) posiadało 169 ankietowanych (ok. 88%). Cztery lata przed podjęciem terapii dług połowy tych respondentów wynosił co najmniej 10 tys. zł, i wzrastał z roku na rok, a w roku rozpoczęcia leczenia połowa ankietowanych miała co najmniej 30 tys. zł długów. Średnie zadłużenie w roku podjęcia terapii wyniosło ponad 50 tys. zł; znaczący wpływ na tę wartość wywarły długi osób najbardziej zadłużonych. Maksymalne zadłużenie w badanej grupie osób wyniosło 640 tys. zł. Okazuje się, że przeciętny poziom wygranych na ogół wzrastał w badanym okresie, lecz poziom przegranych także wzrastał, i to w znacznie większym stopniu; wzrastała więc także różnica między kwotami średnio wygrywanymi i przegrywanymi przez respondentów (rys. 6).



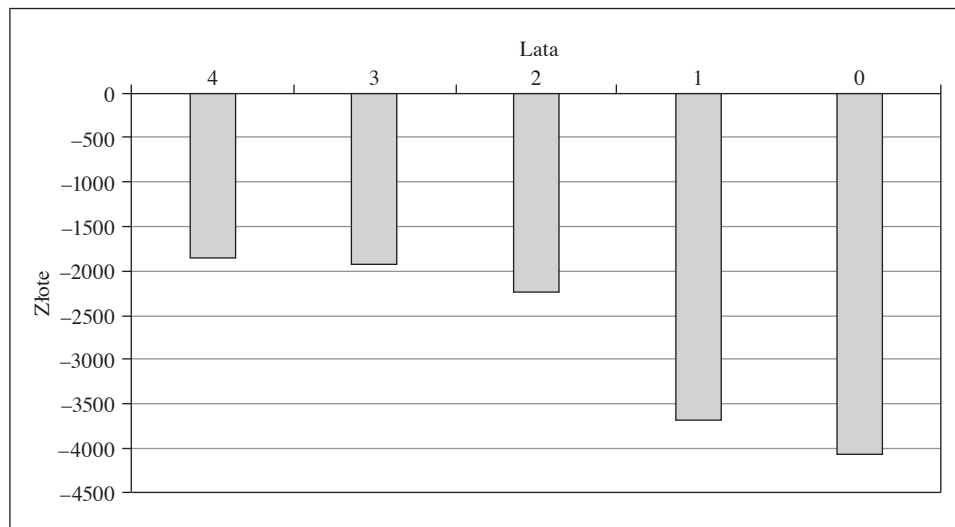
Rys. 4. Miesięczne wydatki na hazard w ostatnich 5 latach przed rozpoczęciem terapii

Źródło: opracowanie własne.



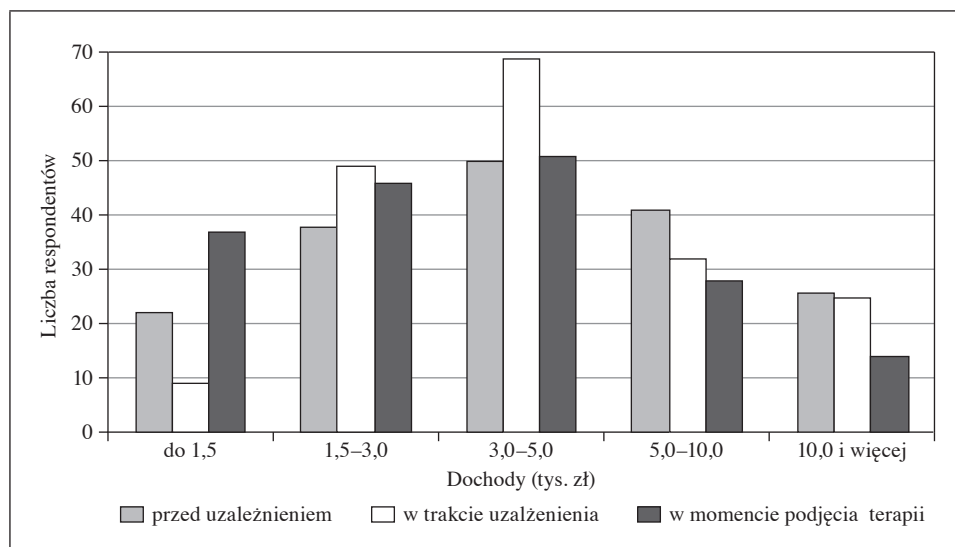
Rys. 5. Średni udział wydatków (w %) na hazard w dochodach respondentów i ich średnie długi przed podjęciem terapii

Źródło: opracowanie własne.



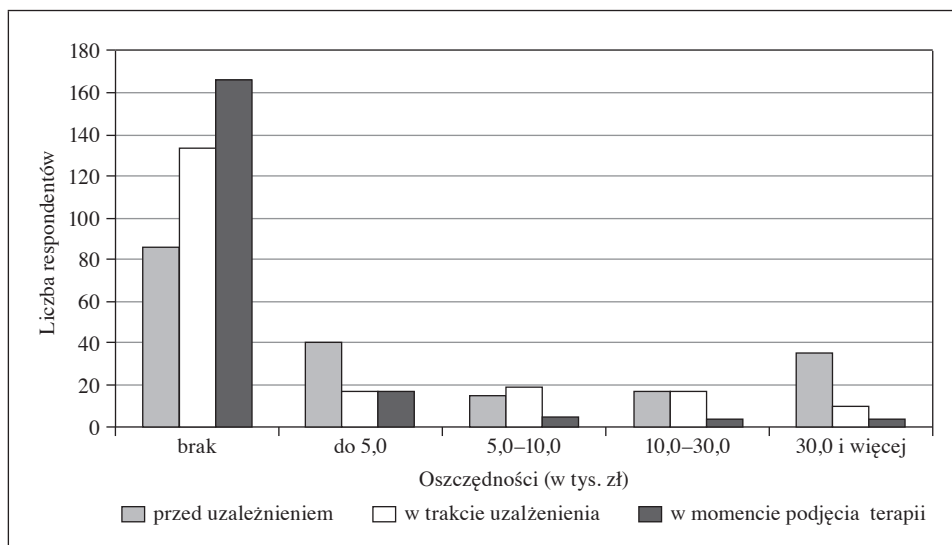
Rys. 6. Średnia różnica między wygranymi i przegranymi w ciągu ostatnich lat przed podjęciem terapii

Źródło: opracowanie własne.



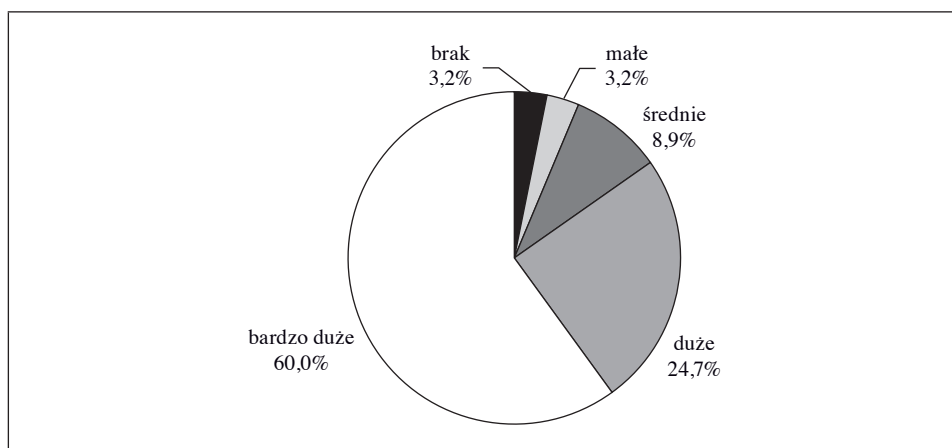
Rys. 7. Rozkład miesięcznych dochodów gospodarstw domowych respondentów (w tys. zł) przed uzależnieniem od hazardu, w jego trakcie oraz w momencie podjęcia aktualnej terapii

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 8. Rozkład oszczędności respondentów (w tys. zł) przed uzależnieniem od hazardu, w jego trakcie oraz w momencie podjęcia aktualnej terapii

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 9. Respondenci (w %) według oceny finansowych skutków uprawiania hazardu

Źródło: opracowanie własne.

Dominującą grupę stanowią respondenci, których dochody gospodarstw domowych kształtowały się w granicach od 3 do 5 tys. zł zarówno przed uzależnieniem, w jego trakcie, jak i w momencie aktualnej terapii (rys. 7), można jednak

zauważyć, że w momencie podjęcia aktualnej terapii nastąpił spadek liczby respondentów, których gospodarstwa domowe należały przed uzależnieniem od hazardu do wysokich grup dochodowych i wzrost ich liczby w niskich grupach dochodowych.

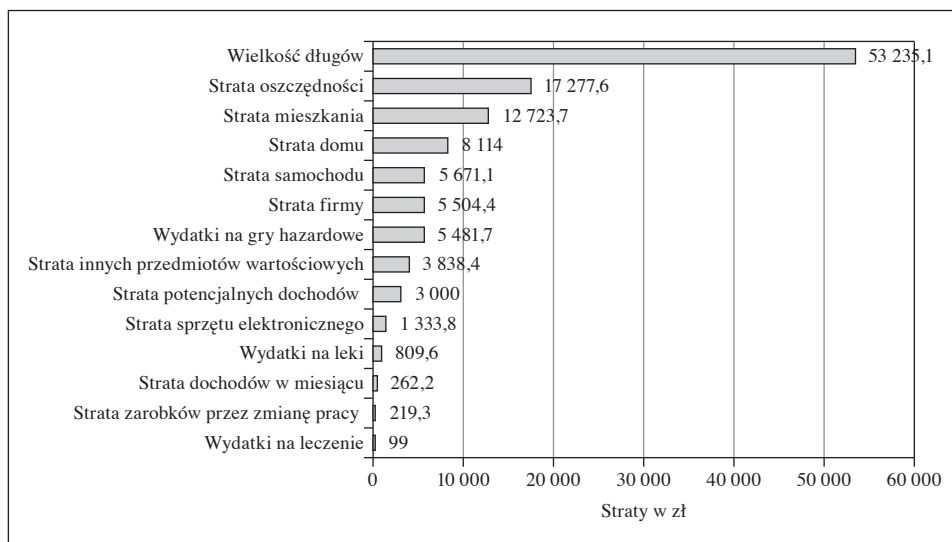
Rys. 8 przedstawiający rozkład oszczędności wskazuje na skrajną asymetrię prawostronną rozkładu dochodów oszczędności w wyróżnionych okresach. Zdecydowana większość zbiorowości respondentów, szczególnie w momencie podjęcia aktualnej terapii, nie posiadała żadnych oszczędności.

Można stwierdzić, że hazard prowadzi do powstania problemów finansowych (rys. 9), w ocenie respondentów najczęściej są one bardzo duże (ok. 60% odpowiedzi) lub duże (ok. 25%). Tylko 3% ankietowanych stwierdziło, że nie ma problemów finansowych związanych z hazardem.

4. Podsumowanie

Na podstawie przeprowadzonego badania można stwierdzić, że uzależnienie od hazardu powoduje w Polsce, podobnie jak w innych krajach, wiele negatywnych skutków o charakterze finansowym, zdrowotnym i społecznym dla osób uzależnionych. Na rys. 10 przedstawiono szacunkowe wielkości niektórych wydatków i strat finansowych spowodowanych uprawianiem hazardu. Przyjęto założenie, że rozkład badanych cech był taki sam w tej części populacji respondentów, którzy na dane pytanie odpowiedzieli, jak i w tej części populacji, gdzie wystąpiły braki odpowiedzi na dane pytanie. Wartości średnie zamieszczone na rys. 10 obliczono w odniesieniu do całej populacji respondentów (tj. dla 228 osób), a nie wyłącznie w odniesieniu do tych osób, których te straty w sposób bezpośredni dotknęły. Można zauważyć, że największe z rozważanych konsekwencji finansowych uzależnienia od hazardu to długi, straty dóbr materialnych i straty oszczędności respondentów (odpowiednio: 53 235,1, 37 185,4 i 17 277,6 zł średnio na 1 respondenta). Wydatki na leczenie zajmują ostatnią pozycję (99,0 zł) i w większości są one pokrywane ze środków NFZ.

Warto dodać, że uzależnieni od hazardu najczęściej grali na automatach do gier, w gry liczbowe i zakłady pieniężne oraz w różne gry w kasynie (rys. 2). Lista ta jest odmienna od listy przedstawionych na rys. 1 rodzajów gier hazardowych według CBOS najczęściej uprawianych w Polsce. Należy także podkreślić, że w ostatnich latach obserwuje się przenoszenie hazardu do wirtualnej rzeczywistości (*e-hazard*), co związane jest z rozpowszechnianiem się Internetu, gdzie można grać, korzystając z karty kredytowej, nie wychodząc z domu.



Rys. 10. Konsekwencje finansowe w przeliczeniu na 1 respondenta

Źródło: opracowanie własne.

Chociaż badana próba osób uzależnionych od hazardu nie została wylosowana w sposób formalny (tj. przy użyciu jednego ze schematów losowania), przy doborze respondentów nie stosowano żadnych ograniczeń czy kryteriów wyboru, tak więc dobór ten można uznać za przypadkowy. Wobec braku podstawy odniesienia trudno jednak stwierdzić, w jakim stopniu zbadana próba jest reprezentatywna dla populacji osób uzależnionych od hazardu w Polsce.

Literatura

- Abbott M., Volberg R., Bellringer M., Reith G. [2004], *A Review of Research on Aspects of Problem Gambling*, Gambling Research Centre, Auckland University of Technology, Final Report, October.
- Augustynek A. [2011], *Jak walczyć z uzależnieniami?* Difin, Warszawa.
- Błaszczynski A., Ladouceur R., Goulet A., Savard C. [2006], *How Much do You Spend Gambling: Ambiguities in Questionnaire Items Assessing Expenditure*, „International Gambling Studies”, vol. 6, <http://dx.doi.org/10.1080/14459790600927738>.
- Collins D., Lapsley H. [2003], *The Social Costs and Benefits of Gambling, an Introduction to the Economic Issues*, „Journal of Gambling Studies”, vol. 19(2).
- Derwich-Nowak A. [2010], *Patologiczny hazard*, Difin, Warszawa.
- Eadington W.R. [2003], *Measuring Costs from Permitted Gaming: Concepts and Categories in Evaluating Gambling's Consequences*, „Journal of Gambling Studies”, vol. 19, nr 2.

- Grinols E.L. [2007], *Social and Economic Impacts of Gambling*, Research and Measurement Issues in Gambling Studies, eds. G. Smith, D. Hodgins, R. Williams, Academic Press, Boston, MA.
- Hawke A. [2000], *Measuring the Impact of Gambling: An Economist's View*, Hawke Institute Working Paper Series No. 4, Magill, Hawke Institute, University of South Australia, South Australia.
- Hayward K., Colman R. [2004], *The Costs and Benefits of Gaming*, A Summary Report from the Literature Review, GPI Atlantic, Glen Haven, Canada.
- Ladouceur R., Boisvert J.M., Pépin M., Loranger M., Sylvain C. [1994], *Social Cost of Pathological Gambling*, „Journal of Gambling Studies”, vol. 10, nr 4, <http://dx.doi.org/10.1007/bf02104905>.
- Mielecka-Kubień Z., Biolik J., Warzecha K., Wójcik A. [2013], *Opracowanie narzędzi do oceny wielkości skutków i kosztów uzależnień od hazardu problemowego i patologicznego oraz ocena wielkości tych skutków i kosztów dla osób uzależnionych na podstawie badań ankietowych (koszty indywidualne)*, raport z badań, maszynopis.
- Oszacowanie rozpowszechnienia oraz identyfikacja czynników ryzyka i czynników chroniących w odniesieniu do hazardu, w tym hazardu problemowego (patologicznego) oraz innych uzależnień behawioralnych* [2012], raport z badań CBOS, Warszawa, www.kbnp.gov.pl.
- Polak w szponach hazardu* [2011], CBOS, Warszawa, www.cbos.pl.
- Schwer R.K., Thompson W.N., Nakamuro D. [2003], *Beyond the Limits of Recreation: Social Costs of Gambling in Southern Nevada*, Annual Meeting of the Far West and American Popular Culture Association, Las Vegas, NV.
- Single E. [2007], *Estimating the Costs of Substance Abuse: Implications to the Estimation of the Costs and Benefits of Gambling*, Research Centre, Ontario, Canada.
- Volberg R.A. [1993], *The Social and Economic Impacts of Gaming: A Framework for Research*, Social and Economic Research Centre (SERC) University of Queensland, *Assessing the Social Costs of Gambling: An Exploration*, Paper presented at the Seventh National Conference on Gambling Behavior, New London, Connecticut.
- Walker D.M., Barnett A.H. [1999], *The Social Costs of Gambling: An Economic Perspective*, „Journal of Gambling Studies”, vol. 15, <http://dx.doi.org/10.1023/A:1023089111024>.

Chosen Aspects of Socio-economic Results of the Addiction to Gambling

(Abstract)

The purpose of the study was to estimate the consequences of gambling addiction on the basis of a survey conducted among the patients of gambling addiction treatment centres. The survey was conducted from March through September 2013. The results of the research indicate that in Poland, like in other countries, gambling addiction causes many negative health, social and economic consequences for both addicts and their families, and the financial as well as non-financial consequences caused by gambling addiction are significant.

Keywords: gambling, financial costs, social costs, individual approach.

Monika Papież

Department of Statistics
Cracow University of Economics

The Application of a Rolling Causality Test for Analysing Dependencies between the Prices of Corn, Crude Oil and Ethanol*

Abstract

The objective of the paper is to analyse causality between the prices of corn, crude oil and ethanol. The analysis conducted for the paper is a dynamic one, and the data used consist of weekly futures prices of crude oil, corn, and ethanol from January 5, 2007 till April 11, 2014. The assessment of causal links between the prices of corn, crude oil and ethanol is carried out with the use of rolling regression applied to the augmented-VAR framework proposed by Toda and Yamamoto in 1995. The application of the rolling regression procedures in the modified Wald (MWALD) causality test allows for the investigation of the persistence of stability in causal relations between the prices analysed. The results obtained indicate that the linkages between energy prices and agricultural commodity prices changed in the period analysed. The results of Granger causality tests reveal that in the analysed period the price of corn influences the price of energy (crude oil and ethanol). Also, crude oil prices influence corn prices and ethanol prices. However, ethanol prices were not observed to influence crude oil prices or corn prices.

Keywords: Granger causality, rolling regression, Toda-Yamamoto tests, commodity prices.

* Supported by the grant No. 2012/07/B/HS4/00700 of the Polish National Science Centre.

1. Introduction

Limited fossil fuel resources and the fact that demand for them is growing continuously coupled with the economic development and excessive pollution of the environment have thrust renewable energy sources to a position of greater importance. Additionally, the European Commission has set an overall binding target to satisfy 20% of the EU's energy needs using renewable sources including biomass, hydro, wind and solar power by 2020. As part of the overall target, each member state has to achieve at least 10% of their transport fuel consumption from renewable sources (including biofuels). These factors caused ethanol production to grow by about 70% in the period 2007–2013. However, such increased demand for ethanol fuel translates into greater demand for corn, which, in turn, increases the price of corn. On the other hand, the increase in the production of biofuels changes the structure of energy sources, which affects the prices of fossil fuels, including crude oil prices. L. Kilian and C. Park (2009) claim that the price of crude oil has the greatest influence on food prices because when it goes up so too do transport and food production costs through the growth of fuel costs for mechanised farming. Additionally, growing prices of crude oil increase the economic motivation to produce biofuels (corn, soybean, sugar cane, oil palm, etc.).

Hence, one of the most important effects of the growing biofuel production has been the change in the nature of the linkages between agricultural commodity markets and energy markets. Thus, it is interesting to investigate how the prices of biofuels affect fossil fuel prices and food prices and vice versa. In this study we analyse causality between corn prices representing food prices, crude oil prices representing fossil fuel prices, and ethanol prices representing biofuel prices.

The investigation of related issues can be seen in numerous recent studies, although their conclusions have been inconclusive. Some researchers analyse only the relations between food and fossil fuel prices while generally ignoring biofuel prices. Some studies confirm the linkages between food prices and crude oil prices (e.g. Chen, Kuo & Chen 2010, Ciaian & Kancs 2011a, 2011b, Harii, Nalley & Hudson 2009, Natanelov *et al.* 2011, Nazlioglu & Soytaş 2011, Nazlioglu 2011, Papież & Śmiech 2012). Other empirical studies report no evidence regarding the oil–food price nexus, thereby supporting the neutrality hypothesis. S. Nazlioglu and U. Soytaş (2012) and Z. Zhang *et al.* (2010) both find agricultural commodity prices to be unaffected by oil price changes in the long run.

The subject literature contains a large number of studies on the linkages between the prices of energy sources (fossil fuel and biofuels) and food prices. Many of these studies use time-series econometric techniques to quantify the relations between oil, ethanol, and food prices in levels (e.g., Kristoufek, Janda & Zilberman 2012, McPhail 2011, Natanelov, McKenzie & Van Huylenbroeck 2013,

Qiu *et al.* 2012, Saghalian 2010, Serra *et al.* 2011, Wixson & Katchova 2012, Zhang *et al.* 2009; Zhang *et al.* 2010) or their volatility interactions (e.g., Gardebroek & Hernandez 2013, Haixia & Shiping 2013, Trujillo-Barrera, Mallory & Garcia 2012). However, to the best of my knowledge, dynamic causality in the crude oil-corn-ethanol nexus analysed with the use of the rolling regression procedures applied in the modified Wald causality test has not yet been addressed in any of them.

The objective of this study is to investigate dependencies between the prices of corn, crude oil and ethanol, using weekly futures data spanning the period from January 5, 2007 to April 11, 2014. The analysis of dependencies has a dynamic nature and focuses on Granger causality between the variables. The assessment of causal links between the variables is carried out with the use of rolling regression applied to the augmented-VAR framework proposed by H. Y. Toda and T. Yamamoto (1995). The application of the rolling regression procedures in the modified Wald (MWALD) causality test allows for the investigation of the persistence of stability in causal relations between the prices analysed.

This allows us to address the following questions:

- Are the dependencies between the prices of energy sources and the food prices stable in time?
- Do the prices of biofuels or fossil fuels affect food prices in the short run?
- Do food prices affect the prices of biofuels or fossil fuels in the short run?
- Do the prices of biofuels affect the prices of fossil fuels in the short run?

This paper contributes to the existing literature mostly due to its application of dynamic analysis, which makes it possible to assess the stability of the dependencies between the variables. Additionally, incorporating the rolling regression procedure into causality tests provides more information on the issue of the crude oil-corn-ethanol nexus. What is more, using a rolled window in the analysis makes it possible to indicate breaking points and facilitates their further interpretation.

The paper is organised as follows. Section 2 briefly reviews the relevant literature. Section 3 presents the methodology applied. Section 4 illustrates the data, while Section 5 contains the empirical results. Finally, the last section presents the main conclusions.

2. Literature Review

Dynamic price relationships between commodity and energy markets have been widely discussed in the literature. Table 1 presents an overview of studies devoted to the linkages between commodity (corn prices) and energy markets (crude oil prices and ethanol prices) in recent years. The table contains a summary

of the papers reviewed, their modelling approach, data used and the main research conclusions as concern the relationship between crude oil, corn and ethanol prices. The analysis of the results of previous studies indicates different relationships between crude oil, corn and ethanol prices, which are attributable to the period and the frequency of data chosen in a given study.

L. Kristoufek, K. Janda & D. Zilberman (2012) use weekly price data for the period between November 2003 and February 2011 to analyse the relationships between biofuels, their production factors (corn, wheat, soybeans and sugarcane) and fossil fuels. Their analyses are based on autoregressive models (VAR and autoregressive distributed lag models — ARDL), which only allow for short-term causality inferences to be drawn. They find that corn causes changes in ethanol prices, while both elasticity and causality are price-dependent. They also discover that biodiesel is caused and elastic to the changes in German diesel prices and the effects are again price-dependent.

L. L. McPhail (2011) uses the monthly price data for the period between January 1994 and February 2010. He employs a structural VAR model to analyse the relationship between US ethanol, crude oil and gasoline and shows that a policy-driven increase in demand for ethanol leads to lower crude oil and gasoline prices. McPhail (2011) supports bidirectional causality links between crude oil and ethanol prices.

In their empirical analysis, V. Natanelov, A. M. McKenzie & G. Van Huylenbroeck (2013) use daily futures prices of crude oil, corn, and ethanol from March 23, 2005 to December 15, 2011. Their results indicate that crude oil Granger causes corn and ethanol. They find that corn precedes ethanol in the corn–ethanol relationship.

C. Qiu *et al.* (2012) use monthly time series data from January 1994 to October 2010 to estimate the structural VAR model and determine the directed acyclic graph (DAG) causality among the variables. Their results for contemporaneous causality relationships between the food and fuel markets show that corn prices are not directly caused by any other prices or quantities. Qiu *et al.* (2012) uncover no spillover effects on corn prices from the oil, gasoline, or ethanol markets. Thus, this indicates no direct or indirect causes of corn prices, which contradicts the popular food-versus-fuel assumption. They also find that the price of corn is a direct cause of the price of ethanol.

S. H. Saghaian (2010) analyses pairwise Granger-causality relations by looking at monthly data on oil, ethanol, corn, soybean, and wheat prices for the period from January 1996 to December 2008. Saghaian (2010) shows that corn prices Granger-cause ethanol prices with statistical significance at all conventional levels, but the reversed direction of Granger causality is statistically significant only at the 10% significance level. The results also show the existence of unidirectional

Table 1. Summary of the Literature on Biofuel Markets

Reference	Time Series Modelling Approach	Data Frequency	Period of Study	Short-run Granger Causality		
				Crude oil prices (CO) – corn prices (C)	Crude oil prices (CO) – ethanol prices (E)	Corn prices (C) – ethanol prices (E)
Kristoufek, Janda & Zilberman (2012)	VAR	Weekly	November 2003–February 2011	CO – C	CO – E	C → E
McPhail (2011)	Structural VAR	Monthly	January 1994–February 2010	×	CO ↔ E	×
Natanelov, McKenzie & Van Huylenbroeck (2013)	VECM	Daily	March 23, 2005–December 15, 2011	CO → C	CO → E	C → E
Qiu <i>et al.</i> (2012)	Structural VAR	Monthly	January 1994–October 2010	CO – C	CO – E	C → E
Saghaian (2010)	VECM	Monthly	January 1996–December 2008	CO → C	CO → E	C ↔ E
Wixson & Katchova (2012)	TVECM	Monthly	January 1995–December 2010	CO ← C	CO → E	C → E
Zhang <i>et al.</i> (2009)	VECM	Weekly	March 1989–December 1999	CO ← C	CO ← E	C – E
			January 2000–December 2007	CO – C	CO – E	C – E

Note: $X \rightarrow Y$ denotes Granger causality running from variable X to variable Y , $X \leftarrow Y$ denotes Granger causality running from variable Y to variable X , $X \leftrightarrow Y$ denotes bidirectional Granger causality between variable X and variable Y , $X - Y$ denotes no Granger causality between variable X and variable Y . Variable X and Y denotes CO – crude oil prices, C – corn prices and E – ethanol prices.

Source: the author's own calculation.

relationships running from crude oil price series to ethanol and corn prices. Additionally, Saghaian (2010) uncovers cointegration relationships between crude oil and corn, soybean and wheat prices with causality running from oil prices to the prices of these agricultural commodities.

T. Serra *et al.* (2011) use an exponential smooth transition VECM for monthly data of ethanol, corn, oil, and gasoline prices from 1990 to 2008. They show that an increase in ethanol prices causes an increase in corn prices. However, they also illustrate that corn price hikes lead to increases in the price of ethanol. Their results indicate the existence of a long-term relationship among the prices analysed. They also identify strong links between energy and food prices.

S. E. Wixson and A. E. Katchova (2012) show on monthly US data from 1995 to 2010 that prices of corn Granger-cause prices of ethanol and prices of crude oil. They find evidence of unidirectional Granger causality running from oil to ethanol.

Zhang *et al.* (2009) estimate a vector error correction model (VECM) using weekly data for fuel prices and prices of agricultural commodities over the period from March 1989 to December 2007. Their results of Granger causality tests for the pre-ethanol boom period from 1989 to 1999 show the existence of unidirectional Granger causality running from ethanol and corn prices to crude oil prices. However, short-run causality between crude oil, ethanol and corn prices is not observed in the ethanol boom period from 2000 to 2007.

3. Methodology

The assessment of causal dependencies between the prices of corn, crude oil and ethanol is done by applying rolling regression to the augmented-VAR framework proposed by Toda and Yamamoto (1995) and further developed by A. N. Rambaldi and H. E. Doran (1996) and H. O. Zapata and A. N. Rambaldi (1997). This procedure avoids the problems involved with testing for Granger causality with respect to the power and size properties of unit root and co-integration tests (Zapata & Rambaldi 1997). The approach suggested by Toda and Yamamoto (1995) applies the modified Wald (MWALD) causality test to the model $VAR(k + d_{\max})$, where k is the lag length of the system determined by information criteria (Akaike Information Criterion (AIC) or BIC), and d_{\max} is the maximal order of integration.

The Toda and Yamamoto methodology involves the following stages. Firstly, the lag length (k) of the system VAR and the maximal order of integration (d_{\max}) are established. To determine whether each series is stationary or not (that is, whether it contains a unit root) the following unit root tests are traditionally used: the Augmented Dickey-Fuller test (ADF) (Dickey & Fuller 1979), DF-GLS test

of Elliott, Rothenber & Stock (1996), and the KPSS (Kwiatkowski *et al.* 1992) unit root test. However, in recent years structural changes have proved to be a key factor in various economic and financial analyses. Unfortunately, the above tests do not assume structural breaks in the series, so it is advisable to use tests which take structural changes into account – for example, the E. Zivot and D. Andrews (1992) sequential test procedure for unit roots, in which the structural breakpoint is estimated endogenously. Zivot and Andrews (1992) considered three different models: model A, which allows for one break in the intercept; model B, which allows for a break in the slope of the trend function; and model C, which allows for a single break in the intercept and in the slope of the trend function. The Zivot and Andrews (1992) test analyses the null hypothesis of a unit root in a series with no break against the alternative of a trend stationary process which combines one-time changes in the level and in the slope of the trend function of the series.

Secondly, the augmented $VAR(k + d_{\max})$ s in levels are estimated. Next, for the model $VAR(k + d_{\max})$ the Wald test to the first k VAR coefficient matrix is performed to test for Granger causality. For testing the null hypothesis, Toda and Yamamoto (1995) confirm that the Wald statistic has the asymptotic χ^2 – distribution with k degrees of freedom, regardless of whether the generating process is stationary (possibly around a linear trend) or cointegrated.

In the case under consideration in this paper, the Toda and Yamamoto version of $VAR(k + d_{\max})$ can be written as:

$$\begin{aligned}
 OIL_t = & \alpha_{01} + \sum_{i=1}^k \alpha_{1i} OIL_{t-i} + \sum_{j=k+1}^{k+d_{\max}} \alpha_{2j} OIL_{t-j} + \sum_{i=1}^k \beta_{1i} CORN_{t-i} + \\
 & + \sum_{j=k+1}^{k+d_{\max}} \beta_{2j} CORN_{t-j} + \sum_{i=1}^k \gamma_{1i} ETHANOL_{t-i} + \sum_{j=k+1}^{k+d_{\max}} \gamma_{2j} ETHANOL_{t-j} + \varepsilon_{1t}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 CORN_t = & \alpha_{02} + \sum_{i=1}^k \alpha_{3i} OIL_{t-i} + \sum_{j=k+1}^{k+d_{\max}} \alpha_{3j} OIL_{t-j} + \sum_{i=1}^k \beta_{3i} CORN_{t-i} + \\
 & + \sum_{j=k+1}^{k+d_{\max}} \beta_{4j} CORN_{t-j} + \sum_{i=1}^k \gamma_{3i} ETHANOL_{t-i} + \sum_{j=k+1}^{k+d_{\max}} \gamma_{4j} ETHANOL_{t-j} + \varepsilon_{2t}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 ETHANOL_t = & \alpha_{03} + \sum_{i=1}^k \alpha_{5i} OIL_{t-i} + \sum_{j=k+1}^{k+d_{\max}} \alpha_{6j} OIL_{t-j} + \sum_{i=1}^k \beta_{5i} CORN_{t-i} + \\
 & + \sum_{j=k+1}^{k+d_{\max}} \beta_{6j} CORN_{t-j} + \sum_{i=1}^k \gamma_{5i} ETHANOL_{t-i} + \sum_{j=k+1}^{k+d_{\max}} \gamma_{6j} ETHANOL_{t-j} + \varepsilon_{3t}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

The directions of Granger causality can be detected by applying standard Wald tests to the first k VAR coefficient matrix. For example, for Eq. (1): $H_0: \beta_{11} = \beta_{12} = \dots = \beta_{1k} = 0$ implies that corn prices (CORN) do not Granger cause crude oil prices (OIL), and $H_0: \gamma_{11} = \gamma_{12} = \dots = \gamma_{1k} = 0$ implies that ethanol prices (ETHANOL) do not Granger cause crude oil prices (OIL).

The changes in dependencies between the variables over time are investigated with the use of rolling analysis (Śmiech & Papież 2013). The fixed window rolling regression is applied to the level VAR model. The first model is built using the data covering observations from 1 to n , while the second model covers observations from 2 to $n + 1$, etc. AIC is used to fix the number of lags of the VAR model each time. The parameters of VAR models are then estimated, and, finally, the MWALD test statistic is used to test Granger causality. This makes it possible to observe whether the dependencies between the variables change for consecutive rolling windows, and if so, how.

4. Data

The data used in this study consist of weekly prices of crude oil (OIL), corn (CORN), and ethanol (ETHANOL) from the period between January 5, 2007 and April 11, 2014 (380 observations). The data used in the analysis include the prices of futures contracts traded on the New York Mercantile Exchange (NYMEX) and the Chicago Board of Trade (CBOT). The present study uses nominal data because a weekly consumer price index is unavailable. The detailed description of variables and descriptive statistics for weekly time series data are presented in Table 2. Fig. 1 presents the weekly prices of the commodities. Next, for the purpose of the study, all the variables are converted to their natural logarithm form.

Table 2. Summary Statistics for Weekly Time Series

Variable Symbol Unit	CORN	OIL	ETHANOL
	CBOT:C	NYMEX:CL	CBOT:EH
	\$/bu	\$/bbl	\$/gal
Mean	5.20	86.47	2.10
Median	4.87	89.30	2.14
Max	8.14	141.73	2.94
Min	3.09	37.93	1.42
Std. Dev.	1.43	19.01	0.39
Skewness	0.31	-0.21	-0.09
Kurtosis	1.69	3.35	2.09

Source: the author's own calculation.

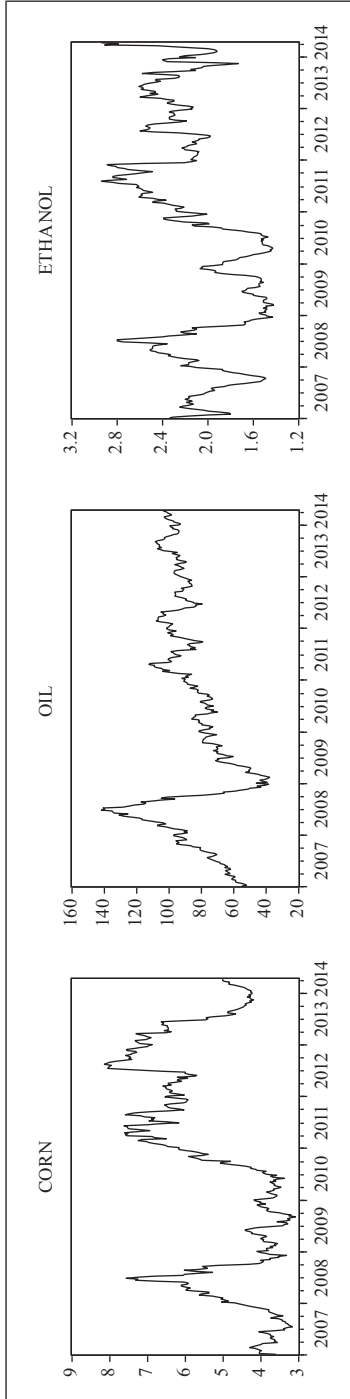


Fig. 1. Weekly Prices of Crude Oil (OIL), Corn (CORN), and Ethanol (ETHANOL) between January 5, 2007 and April 11, 2014
Source: the author's own calculations.

5. Empirical Results

To investigate the stationarity issue and the possible presence of unit roots in the series, univariate analysis of each of the time series is carried out. We initially investigate the issue of unit root in all time series data by applying the Zivot and Andrews (1992) unit root test. Table 3 shows the results of the test for three alternative models (one break in the level of the series, a one-time change in the slope of the trend function, one break in the level and the slope of the trend function of the series). The test statistics indicate that all series are I (1).

Table 3. Zivot-Andrews Unit Root Tests

Specification	Statistics (Level)			Statistics (First Differences)		
	A	B	C	A	B	C
Corn	-3.31 7/02/2010	-2.49 7/20/2012	-3.35 7/30/2010	-16.33*** 9/11/2009	-16.17*** 10/15/2010	-16.47*** 7/04/2008
Oil	-4.33 9/26/2008	-2.90 1/16/2009	-4.74 7/18/2008	-9.49*** 2/20/2009	-9.28*** 9/19/2008	-10.45*** 1/02/2009
Ethanol	-3.90 8/06/2010	-3.14 1/30/2009	-4.12 8/06/2010	-11.84*** 8/12/2011	-11.75*** 3/01/2013	-11.88*** 7/04/2008

Note: A, B, C denote model types and correspond to the three models in Zivot and Andrews (1992). The 1%, 5% and 10% critical values are -5.34 / -4.93 / -4.58; -4.80/-4.42/-4.11 and -5.57/-5.08/-4.82 for models A, B and C, respectively. The numbers in brackets are the estimated structural break dates (mm/dd/year). *** Rejection of the null hypothesis at the 1% level. The null hypothesis states that a series has a unit root with drift and an exogenous structural break.

Source: the author's own calculation.

As a large number of structural changes has been identified (cf. Table 3), a traditional analysis of causal relations may be distorted. To avoid this problem, rolling regression applied to the augmented-VAR framework proposed by Toda and Yamamoto (1995) is used in further analysis. Conducting the analysis within the rolling regression requires obtaining the window size (VAR models with fixed sample size each time, i.e. a fixed window size). The VAR models are calculated for a rolling 104 observation time frame (approximately 2 calendar years) by adding one observation to the end and removing the first one, and so on. That is, starting with observations 1–104, the first VAR model is calculated. The VAR model for observations 2–105, 3–106, etc. are then calculated. Using AIC, we determine k – the number of lags in VAR models for each window.

Granger causality tests can be applied using an MWALD test statistic on the first k coefficients. Fig. 2 presents the p -value for Granger causality tests. The horizontal axis indicates the ending point of the window of analysis. (The test

statistics are reported on the last day of the rolling sample period from which they are derived). The first value represents the p -value for Granger causality tests for the model estimated for the period from January 5, 2007 to December 26, 2008. The last one represents the p -value for the Granger causality tests in the VAR estimated for the window April 20, 2012–April 11, 2014. The horizontal line in the chart indicates a significance level of 5%. The values below this line mean that for a given sub-period variable A Granger causes variable B ($A \rightarrow B$).

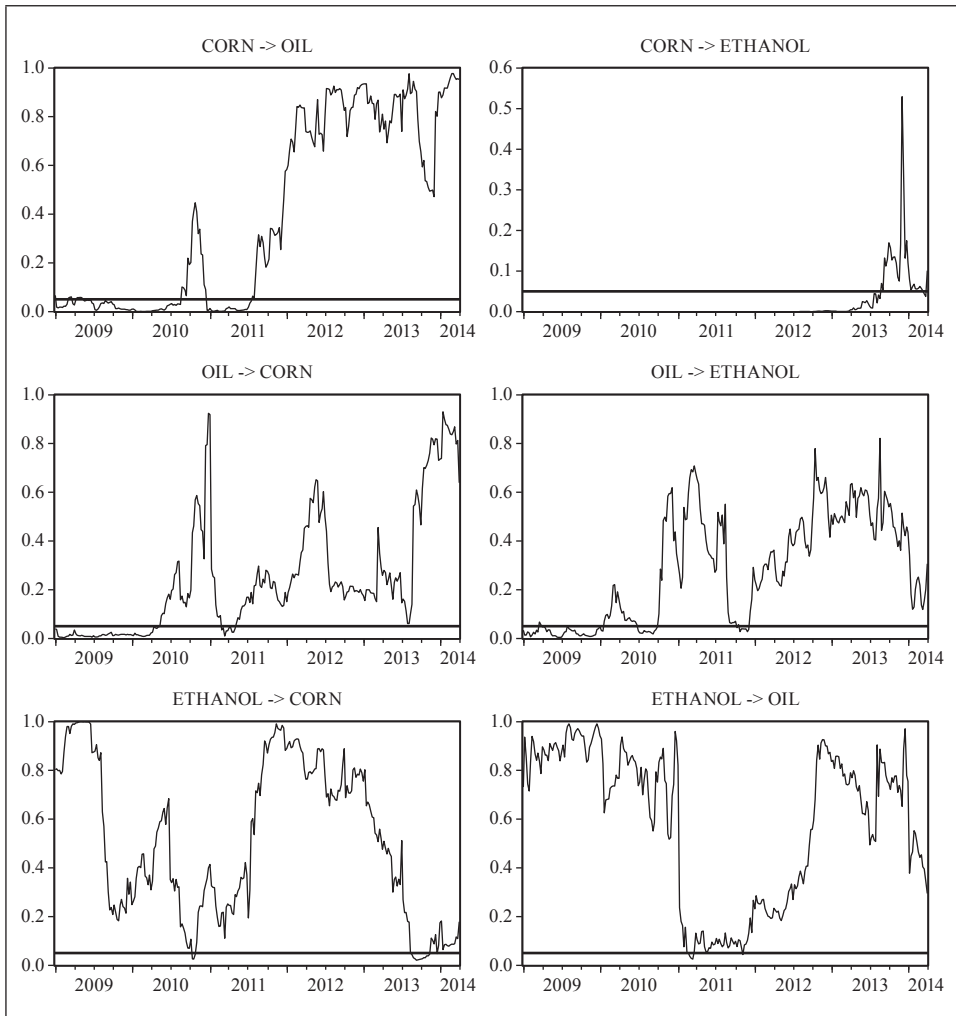


Fig. 2. Rolling Granger Causality Test – p -value of MWALD Test

Source: the author’s own calculation, using econometric software EViews 8.0 and R Cran programme.

The results presented in Fig. 2 reveal that, in the period analysed, the variables influencing other variables change. The analysis of the results presented in Fig. 2 indicates that crude oil prices influence corn prices in the sub-periods which started at the beginning of the analysis, January 2007 (that is, the sub-period from January 2007 till December 2008), up to the sub-period beginning in April 2008 (the last dependence sub-period lasted from April 2008 till March 2010). This period witnesses considerable volatility in oil prices connected with the global financial crisis after the collapse of Lehman Brothers. In the sub-periods beginning after April 2008, crude oil prices do not influence corn prices. Similarly, corn prices influence crude oil prices in the sub-periods beginning in January 2007. Their influence is longer, however, and the last sub-period for which past values of corn prices improve the forecasts of crude oil prices is September 2009 till August 2011. The results of the analysis indicate mutual dependence between crude oil prices and corn prices from the beginning of the analysis up to the first quarter of 2010. Later, corn prices influence crude oil prices. No dependencies between agricultural commodity prices represented by corn prices and crude oil prices are found for the sub-periods beginning in the second half of 2011.

Similarly, the results of the analysis presented in Fig. 2 indicate that crude oil prices influence ethanol prices for the sub-periods beginning in January 2007 up to the sub-periods beginning in October 2008 (that is, the last dependence period lasted from October 2008 to September 2010). However, the impact of ethanol prices on crude oil prices is not observed in the whole period analysed, which means that, within the energy market, Granger causality tests show that changes in the price of oil are an indicator of future changes in the price of ethanol. This relationship is unidirectional, with changes in the price of ethanol unable to help predict future changes in the price of oil.

It can also be observed that past values of corn prices improve the forecasts of ethanol prices from the beginning of the analysis up to the sub-periods beginning in the third quarter of 2011 and which last up to the third quarter of 2013. Corn prices do not influence ethanol prices in the sub-periods which end from the fourth quarter of 2013 on, whereas in the whole period analysed significant causal relationships between ethanol prices and corn prices do not exist.

6. Conclusion

The objective of the study is to do a dynamic assessment of dependencies between prices of corn, crude oil and ethanol using weekly data spanning the period January 2007 to April 2014. The analysis, which uses rolling regression in augmented VAR models, allows me to answer the questions posed at the begin-

ning. The results obtained reveal that the dependencies between the prices of energy sources and food prices change with time.

The results of this analysis may indicate that food prices represented by corn prices influence the prices of energy sources. Corn prices seem to have affected crude oil prices (a fossil fuel) only up to the middle of 2010, while they continue to affect ethanol prices (biofuel prices) up to the third quarter of 2013. In the later period the impact of corn prices on energy source prices is not observed. Similarly, using monthly data from 1995:01 to 2010:12, Wixson and Katchova (2012) show that changes in the price of corn can be a leading indicator of changes in oil and ethanol prices.

The results of Granger causality tests indicate that changes in crude oil prices can be a leading indicator of changes in corn prices only up to the first quarter of 2010 and in ethanol prices up to the third quarter of 2010. In the later period the impact of crude oil prices on corn prices and ethanol prices is not observed.

The price of biofuels represented by ethanol prices does not influence either fossil fuel prices represented by crude oil prices or food prices represented by corn prices.

Additionally, it can be concluded that, from the third quarter of 2010 on, there are no causal relations between fossil fuel prices (represented by crude oil prices) and biofuel prices (represented by ethanol prices). Zhang *et al.* (2009) find a similar lack of links between ethanol prices and crude oil prices during the ethanol boom (2000–2007), although McPhail (2011), who uses monthly data from the period January 1994–February 2010, shows that real ethanol prices Granger cause real oil prices and vice versa.

Bibliography

- Chen S., Kuo H., Chen C. (2010), *Modeling the Relationship between the Oil Price and Global Food Prices*, "Applied Energy", vol. 87: 2517–2525, <http://dx.doi.org/10.1016/j.apenergy.2010.02.020>.
- Ciaian P., Kancs A. (2011a), *Food, Energy and Environment: Is Bioenergy the Missing Link?* "Food Policy", vol. 36: 571–580, <http://dx.doi.org/10.1016/j.foodpol.2011.06.008>.
- Ciaian P., Kancs A. (2011b), *Interdependencies in the Energy–Bioenergy–Food Price Systems: A Cointegration Analysis*, "Resource and Energy Economics", vol. 33: 326–348, <http://dx.doi.org/10.1016/j.reseneeco.2010.07.004>.
- Dickey D., Fuller W. (1979), *Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root*, "Journal of the American Statistical Association", vol. 74: 427–431, <http://dx.doi.org/10.1080/01621459.1979.10482531>.
- Elliott G., Rothenber T.J., Stock J.H. (1996), *Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root*, "Econometrica", vol. 64: 813–836, <http://dx.doi.org/10.2307/2171846>.

- Gardebroek C., Hernandez M. A. (2013), *Do Energy Prices Stimulate Food Price Volatility? Examining Volatility Transmission between US Oil, Ethanol and Corn Markets*, "Energy Economics", vol. 40: 119–129, <http://dx.doi.org/10.1016/j.eneco.2013.06.013>.
- Haixia W., Shiping L. (2013), *Volatility Spillovers in China's Crude Oil, Corn and Fuel Ethanol Markets*, "Energy Policy", vol. 62: 878–886, <http://dx.doi.org/10.1016/j.enpol.2013.07.026>.
- Harri A., Nalley L., Hudson D. (2009), *The Relationship between Oil, Exchange Rates, and Commodity Prices*, "Journal of Agricultural and Applied Economics", vol. 41: 501–510, <http://dx.doi.org/10.1017/S1074070800002959>.
- Kilian L., Park C. (2009), *The Impact of Oil Price Shocks on The U.S. Stock Market*, "International Economic Review", vol. 50: 1267–1287, <http://dx.doi.org/10.1111/j.1468-2354.2009.00568.x>.
- Kristoufek L., Janda K., Zilberman D. (2012), *Mutual Responsiveness of Biofuels, Fuels and Food Prices*, Working Paper, Centre for Applied Macroeconomic Analysis, Australian National University, Canberra, <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2294754>.
- Kwiatkowski D., Phillips P. C. B., Schmidt P., Shin Y. (1992), *Testing the Null Hypothesis of Stationary against the Alternative of a Unit Root*, "Journal of Econometrics", vol. 54: 159–178.
- McPhail L. L. (2011), *Assessing the Impact of US Ethanol on Fossil Fuel Markets: A Structural VAR Approach*, "Energy Economics", vol. 33(6): 1177–1185, <http://dx.doi.org/10.1016/j.eneco.2011.04.012>.
- Natanelov V., Alam M.J., McKenzie A.M., Van Huynenbroeck G. (2011), *Is There Co-movement of Agricultural Commodities Futures Prices and Crude Oil?* "Energy Policy", vol. 39: 4971–4984, <http://dx.doi.org/10.1016/j.enpol.2011.06.016>.
- Natanelov V., McKenzie A. M., Van Huynenbroeck G. (2013), *Crude Oil–Corn–Ethanol–Nexus: A Contextual Approach*, "Energy Policy", vol. 63: 504–513, <http://dx.doi.org/10.1016/j.enpol.2013.08.026>.
- Nazlioglu, S. (2011), *World Oil and Agricultural Commodity Prices: Evidence from Nonlinear Causality*, "Energy Policy", vol. 39: 2935–2943, <http://dx.doi.org/10.1016/j.enpol.2011.03.001>.
- Nazlioglu S., Soytaş U. (2011), *World Oil Prices and Agricultural Commodity Prices: Evidence from an Emerging Market*, "Energy Economics", vol. 33: 488–496, <http://dx.doi.org/10.1016/j.eneco.2010.11.012>.
- Nazlioglu S., Soytaş, U. (2012), *Oil Price, Agricultural Commodity Prices, and the Dollar: A Panel Cointegration and Causality Analysis*, "Energy Economics", vol. 34: 1098–1104, <http://dx.doi.org/10.1016/j.eneco.2011.09.008>.
- Papież M., Śmiech S. (2012), *Causality in Mean and Variance between Returns of Crude Oil and Metal Prices, Agricultural Prices and Financial Market Prices* (in: J. Ramík, D. Stavárek (eds), *Proceedings of 30th International Conference Mathematical Methods in Economics*, Silesian University, School of Business Administration, Karviná: 675–680.
- Qiu C., Colson G., Escalante C., Wetzstein M. (2012), *Considering Macroeconomic Indicators in the Food before Fuel Nexus*, "Energy Economics", vol. 34: 2021–2028, <http://dx.doi.org/10.1016/j.eneco.2012.08.018>.
- Rambaldi A. N., Doran H. E. (1996), *Testing for Granger Non-causality in Cointegrated System Made Easy*, Working Papers in Econometrics and Applied Statistics, 88, Department of Econometrics, University of New England.

- Saghaian S. H. (2010), *The Impact of the Oil Sector on Commodity Prices: Correlation or Causation?* "Journal of Agricultural and Applied Economics", vol. 42: 477–485, <http://dx.doi.org/10.1017/S1074070800003667>.
- Serra T., Zilberman D., Gil J. M., Goodwin B. K. (2011), *Nonlinearities in the US Corn-ethanol-oil-gasoline Price System*, "Agricultural Economics", vol. 42(1): 35–45, <http://dx.doi.org/10.1111/j.1574-0862.2010.00464.x>.
- Śmiech S., Papięż M. (2013), *Fossil Fuel Prices, Exchange Rate, Stock Market: A Dynamic Causality Analysis on the European Market*, "Economics Letters", vol. 118: 199–202, <http://dx.doi.org/10.1016/j.econlet.2012.10.010>.
- Toda H. Y., Yamamoto T. (1995), *Statistical Inference in Vector Autoregressions with Possibly Integrated Processes*, "Journal of Econometrics", vol. 66: 225–250, [http://dx.doi.org/10.1016/0304-4076\(94\)01616-8](http://dx.doi.org/10.1016/0304-4076(94)01616-8).
- Trujillo-Barrera A., Mallory M., Garcia P. (2012), *Volatility Spillovers in US Crude Oil, Ethanol, and Corn Futures Markets*, "Journal of Agricultural and Resource Economics", vol. 37(2): 247–262.
- Wixson S. E., Katchova A. E. (2012), *Price Asymmetric Relationships in Commodity and Energy Markets*, Paper presented at the 123rd European Association of Agricultural Economists' Seminar, Price Volatility and Farm Income Stabilisation, Dublin, February 23–24.
- Zapata H. O., Rambaldi A. N. (1997), *Monte Carlo Evidence on Cointegration and Causation*, "Oxford Bulletin of Economics and Statistics", vol. 59(2): 285–298, <http://dx.doi.org/10.1111/1468-0084.00065>.
- Zhang Z., Lohr L., Escalante C., Wetzstei M. (2009), *Ethanol, Corn, and Soybean Price Relations in a Volatile Vehicle-fuels Market*, "Energies", vol. 2(2): 320–339, <http://dx.doi.org/10.3390/en20200320>.
- Zhang Z., Lohr L., Escalante C., Wetzstein M. (2010), *Food versus Fuel: What Do Prices Tell Us?* "Energy Policy", vol. 38: 445–451, <http://dx.doi.org/10.1016/j.enpol.2009.09.034>.
- Zivot E., Andrews D. (1992), *Further Evidence of the Great Crash, the Oil-price Shock and the Unit-root Hypothesis*, "Journal of Business and Economic Statistics", vol. 10: 251–270, <http://dx.doi.org/10.1080/07350015.1992.10509904>, <http://dx.doi.org/10.2307/1391541>.

Zastosowanie rolowanego testu przyczynowości do analizy zależności między cenami kukurydzy, ropy naftowej i etanolu (Streszczenie)

Celem artykułu jest analiza zależności przyczynowych pomiędzy cenami kukurydzy, ropy naftowej i etanolu. Badanie krótkookresowych zależności przyczynowych przeprowadzono w ramach analizy przyczynowości w sensie Grangera na danych tygodniowych z okresu 5 stycznia 2007–11 kwietnia 2014 r. z wykorzystaniem regresji ruchomych (*rolling regression*) do modelu VAR, który zaproponowali H.Y. Toda i T. Yamamoto w 1995 r. Zastosowanie procedury ruchomych regresji do zmodyfikowanego testu przyczynowości (MWALD) pozwala na sprawdzenie, czy relacje przyczynowe pomiędzy analizowanymi cenami są stabilne w czasie. Uzyskane wyniki pozwalają stwierdzić, że związki między cenami surowców energetycznych i cenami towarów rolnych ulegają zmianie w analizowanym okresie. Wyniki badań wskazują, że ceny kukurydzy

są przyczyną w sensie Grangera cen surowców energetycznych (ropy naftowej i etanolu). Również ceny ropy naftowej są przyczyną w sensie Grangera cen kukurydzy i etanolu. Dodatkowo stwierdzono, że ceny etanolu nie są przyczyną w sensie Grangera cen ropy naftowej i kukurydzy.

Słowa kluczowe: ceny towarów, metoda Tody-Yamamoto, przyczynowość w sensie Grangera, regresje ruchome.

Sławomir Śmiech

Department of Statistics
Cracow University of Economics

Co-movement of Commodity Prices – Results from Dynamic Time Warping Classification

Abstract

Several factors are responsible for difficulties in describing the behaviour of commodity prices. Firstly, there are numerous different categories of commodities. Secondly, some categories overlap with other categories, while others indirectly compete in the market. Thirdly, although essentially commodity prices react to changes in economic conditions or exchange rates, to a large extent these prices depend on supply disturbances. However, in recent years commodity prices co-move, and researchers, beginning with Pindyck and Rotemberg (1990), have been trying to explain this phenomenon.

The objective of the article is to conduct the classification of the series of commodity prices in the pre-crisis and after-crisis periods. The results of such classification will reveal whether co-movement of commodity prices is the same in both periods. The analysis is based on monthly data from the period January 2001 to February 2014. All prices and price indices are published by the World Bank. The results obtained in dynamic time warping clustering reveal that co-movement of commodity prices is more evident in the pre-crisis period. There are only several paths which determine commodity prices.

Keywords: commodity prices, time series clustering, co-movement, dynamic time warping.

1. Introduction

Several factors are responsible for difficulties in describing the behaviour of commodity prices. Firstly, there are many different categories of commodities. Secondly, some categories overlap with others (for example, biofuel production and energy), while others indirectly compete in the market (for example, the development of one type of crop reduces the supply of other crops cultivated in a given area). Thirdly, although essentially commodity prices react to changes in economic conditions or exchange rates, to a large extent they depend on supply disturbances (such as droughts, floods, armed conflicts, etc.). In spite of the complex nature of commodity behaviour, the last decade saw them tend to move together. J. A. Frankel (2008) argues that the reason for such co-movement is the real interest rate, while F. Q. Akram (2009) additionally investigates the role of the dollar exchange rates, and L. E. O. Svensson (2008) and L. Kilian (2008, 2009) discuss the role of shifts in the global supply and demand. P. Krugman (2008) attributes the increase in food prices to biofuel production, as biofuel prices are correlated with oil prices. Numerous authors (e.g. Gilbert 2009, Phillips & Yu 2010, Irwin & Sanders 2011, Pindyck & Rotemberg 1990) reason that co-movement is caused by speculation and the existence of price bubbles. From a methodological point of view, several methods can be used to assess price co-movement. One of the most common is cointegration (Papież & Śmiech 2011), which has more recently been replaced by the panel cointegration approach (Nazlioglu & Soytas 2012), threshold cointegration (Natanelov *et al.* 2011) and the general equilibrium model (see e.g. Gohin & Chantret 2010). Other methods incorporate different statistical factor models, e.g. FAVAR and PANIC (Byrne, Fazio & Fiess 2013).

The objective of this paper is to classify a series of commodity prices using monthly data from three periods: before the global financial crisis (January 2001 to June 2008), after the crisis (January 2009 to February 2014), and the period covering the entire sample (January 2001 to February 2014). The prices of 54 commodities taken into consideration in the analysis are listed by the World Bank in six categories, i.e. energy, metals, beverages, food, raw materials and precious metals. Clustering was done with dynamic time warping methods, which enable the assessment of similarity between series shapes, i.e. a distance measure which identifies time-shifted patterns among series and seems to be appropriate for the analysis of commodity co-movement. Three methods are used to classify the time series: Ward's method, complete (hierarchical), and pam (division). The results of the classification are assessed by internal classification measuring the average silhouette width. The clustering conducted provides answers to the following questions:

- did commodity prices move at a similar rate in the periods before and after the global financial crisis?
- how many clusters of commodity prices are there and how homogeneous are they?
- do commodities from the same category (e.g. energy commodities) belong to the same clusters – that is, do their prices behave in a similar manner?
- to what extent do the clusters obtained in the study differ from the indices listed by the World Bank?

Our work differs from that found in the existing literature in one important respect – the methodology we use. Related studies have all assumed linear correlations. The methodology (i.e. dynamic time warping) used in this study, however, allows us to stretch or compress parts of two time series in order to draw comparisons.

Unlike traditional methods used to measure time series similarity, the high congruity of both paths does not necessarily mean that changes in trends occur at the same moment. Dynamic time warping allows us to delay changes in the trend of one commodity price series in relation to the other, which may be caused by different levels of inventories, among other things. This is why the methodology can be used as a universal analysis of the nonlinear relationship and co-movement of commodity prices.

The rest of the paper is organised as follows. Section 2 describes the methodology, section 3 discusses the empirical results, and the final section provides a discussion and conclusion.

2. Methodology

Following the division suggested by W. T. Liao (2005), there are three major time series clustering approaches: raw data, feature-based and model-based. The first ones deal with raw data in the time and frequency domain. They imply working with high dimensional space and are not effective if the raw data are highly noisy. In feature-based approaches, certain features are extracted then clustered. Y. Kakizawa, R. H. Shumway and M. Taniguchi (1998) characterise similarities of multivariate stationary time series in terms of their covariance or, equivalently, spectral metrics. Model-based approaches assume that each time series is generated by a particular time series model. To obtain dissimilarity between series, the models are fitted and then discrepancies between them are looked for. Some authors suggest using some statistics of the errors associated with the estimates (Kumar & Patel 2007). The main disadvantage of the feature-based and model-based approaches is the obvious loss of information. What is more, the

results of clustering in these methods depend on feature selection and problems with parametric modelling. A. Alonso *et al.* (2006) suggest another classification approach – n clustering based on the models that generated the observations, but in respect of the forecasts at a specific future time.

One of the most widely used methods of assessing similarity in the raw data approach is Dynamic Time Warping (DTW) (Berndt & Clifford 1994). Given two time series, $Q = q_1, q_2, \dots, q_n$ and $R = r_1, r_2, \dots, r_m$, DTW aligns them in such a way as to minimise their difference. The metric establishes an n by m cost matrix C , which contains the distances (Euclidean) between two points q_i and r_j . A warping path $W = w_1, w_2, \dots, w_K$, where $\max(m, n) < K < m + n - 1$, is formed by a set of matrix components, respecting three rules: boundary condition, monotonicity condition and step size condition. Eventually, the path that minimises the warping cost is considered the DTW distance:

$$d_W(R, Q) = \min \left(\sqrt{\sum_{k=1}^K w_k} \right). \quad (1)$$

The optimal warping path can be found using dynamic programming to evaluate the following expression:

$$\gamma(i, j) = d(r_i, q_j) + \min \{ \gamma(i-1, j-1), \gamma(i-1, j), \gamma(i, j-1) \}, \quad (2)$$

where:

$d(r_i, q_j)$ – the distance found in the current cell,

$\gamma(i, j)$ – the cumulative distance of $d(r_i, q_j)$ and the minimum cumulative distances from the three nearby cells.

After determining the distance matrices, hierarchical or partitioning (crisp or fuzzy) clustering methods are used to find clusters. Silhouette plot width (Kaufman & Rousseeuw 1990) is used to evaluate the optimal number of clusters in the data and to assess which objects lie well within their cluster internal validity indices. The silhouette width is defined for each sample and takes values from -1 to 1 . If the value is close to 1 , the object is near the centre of the cluster it belongs to. Conversely, if the value is negative, the object is in an improper cluster. Finally, if the silhouette value is close to null, the sample is located near the frontier between its cluster and the nearest one. The higher the value of average silhouette width, the better the division of the series.

Adjusted Rand Index (ARI) can be next applied to compare the alternative classification results. The Adjusted Rand Index was created by L. Hubert and P. Arabie (1985), who used the generalised hypergeometric distribution as the model of randomness. The index has an expected value of zero (for independent clustering) and a maximum value of 1 (for identical clustering). The higher the Adjusted Rand Index, the greater the agreement between the clustering results will be.

3. Data and Empirical Results

The data used in this study consist of monthly price indices from January 2001 to February 2014. All indices came from World Bank Commodity Price Data and are expressed in US dollars. Before the classification procedure, all price series are expressed as indices with their average values in 2007 set to be 1. The analysis is based on 54 series of variables, which are assigned to World Bank classes. The whole sample period is divided into two sub-periods: January 2001–June 2008 and January 2009–February 2014, thus the classification is based on the pre-crisis and post-crisis periods. The results are complemented by clustering series in the whole sample. The division is motivated by the disparate behaviour of commodity prices in these sub-periods. DTW methods are used to classify the time series. After obtaining dissimilarity metrics, Ward's, complete (hierarchical group of methods) and pam (division) methods are used to locate the clusters.

The results of clustering for the period 2001–2008 are presented in Fig. 1¹. They yield three main clusters of time series (the average silhouette width is the biggest for three clusters in Ward's method – see Table 1²). The first cluster consists of 28 commodity prices including most energy commodities (those in Fig. 1 beginning with E), except for Gas US, metals (MM) besides aluminium, and precious metals (PM). What is more, commodities belonging to the same category are close to each other, meaning their series paths are quite similar. The prices from the categories listed above are closest to one another, so their paths are the most similar. The second cluster includes the prices of Gas US and Sugar EU, between which it is difficult to spot any connections. The last cluster consists of 24 commodity prices including most food, raw materials and beverages commodities. The silhouette plot indicates that most commodity prices have been assigned to proper clusters (Fig. 4). The silhouette width is negative in only three cases, indicating that objects have been classified in improper clusters. The average silhouette width for the first sub-period is 0.43.

The results of clustering for the post-crisis period, with the assumption of Ward's method, are presented in Fig. 2. Although in this case the average silhouette width suggests a division into 2 clusters, we have opted for three clusters, so energy, metal, and precious metals commodities are in different groups. There are 14 commodity prices in the first cluster, including oil prices (except for WTI

¹ The results of the complete method and pam method are available from the author upon request.

² Presentation of the Ward's method results is not dictated by the fact this method clearly gave the best clusters. In fact, none of the methods dominated the others. Even though the results of Ward's method was neither better nor worse as compared to other options, that method served well as an illustration of the issues discussed.

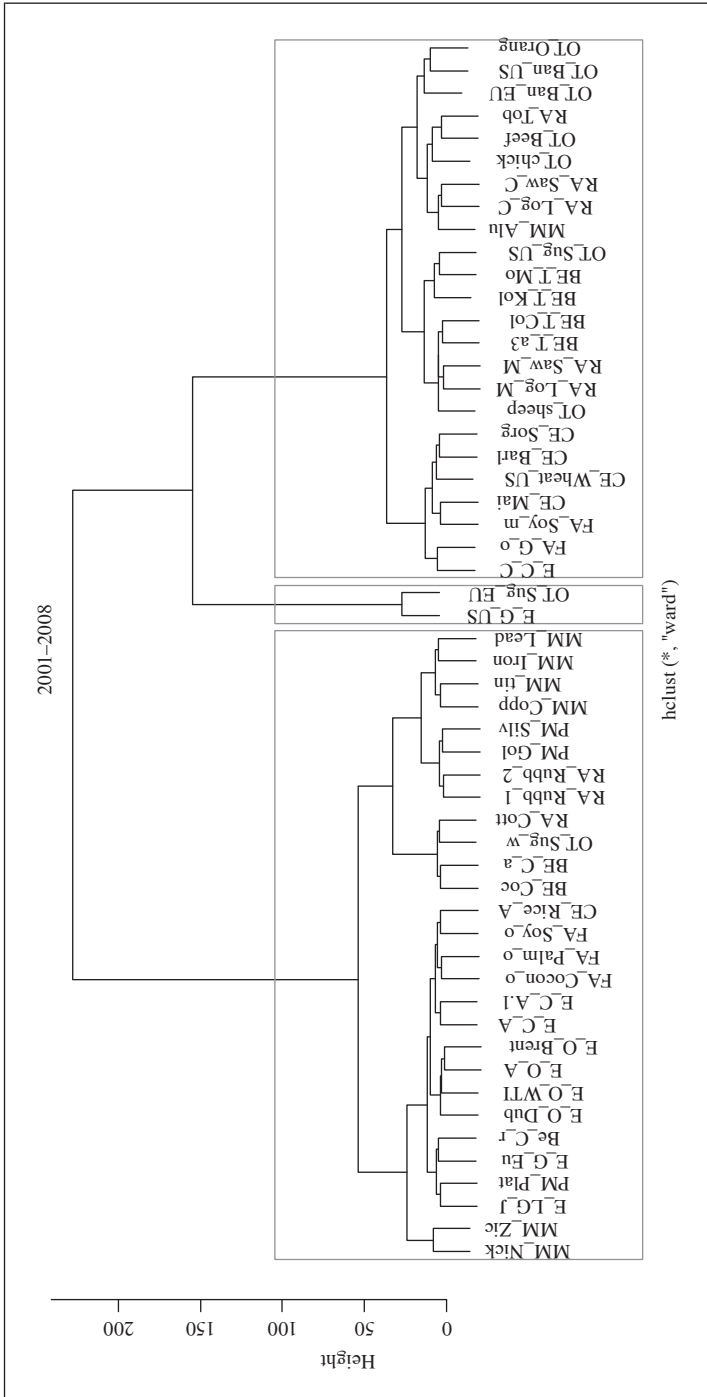


Fig. 1. The Classification Results in the First Sub-period
Source: own calculations.

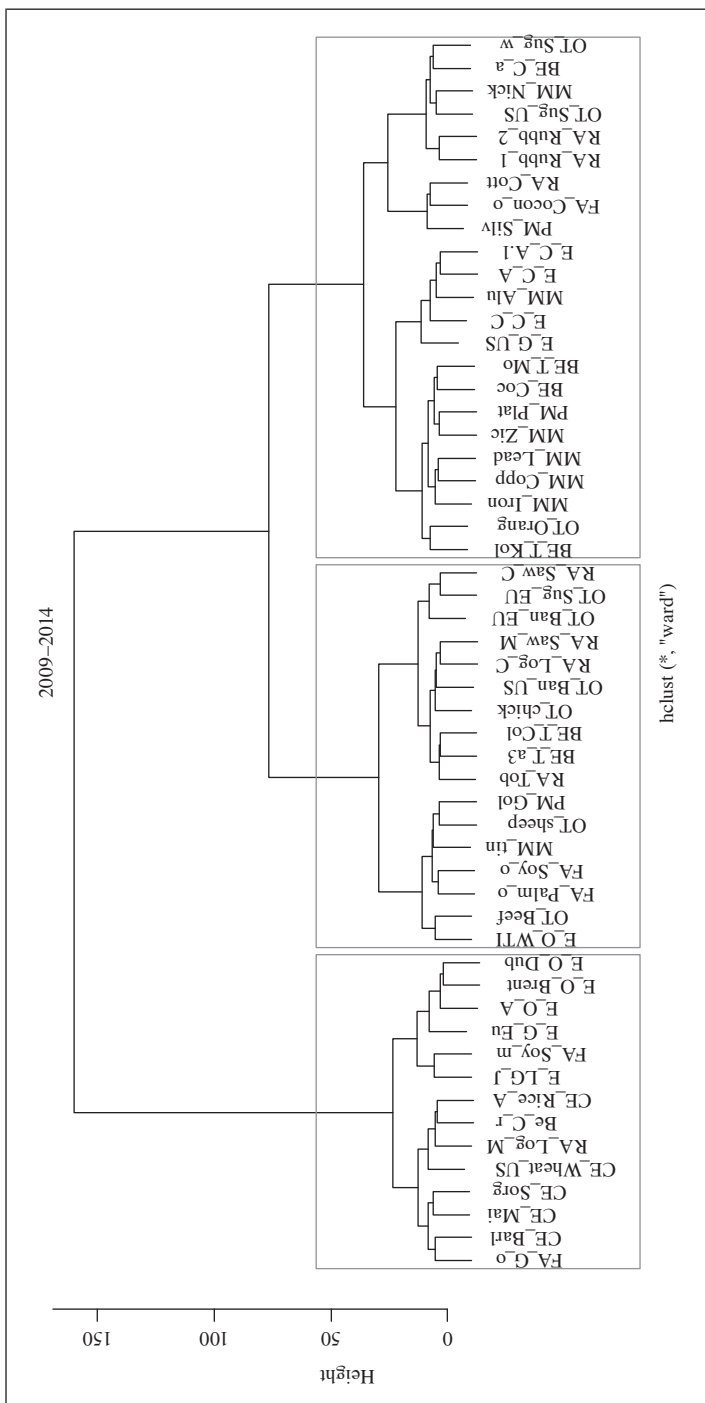


Fig. 2. The Classification Results in the Second Sub-period

Source: own calculations.

Oil, which is in the second cluster), and some food and raw material commodity prices. There are 19 elements in the second cluster, including most food and raw material prices, gold, and tin. There are 23 prices in the third cluster, including most precious metals, metals and minerals, coal prices and the remaining food commodities. The silhouette plot (Fig. 4) reveals that in the post-crisis period each cluster is less homogeneous than it was before. The average silhouette for the clusters varies between 0.17 and 0.35. There are five commodity prices that seem to have been classified in the wrong clusters. The average silhouette width calculated for the post-crisis period is only 0.26, suggesting that the structure obtained is artificial.

Finally, Fig. 3 presents the results obtained for the whole sample. Here the average silhouette width suggests (see Table 1) division into 4 groups (although the quality of the division is rather poor). The first cluster contains 17 elements including agricultural commodities (beverages, raw materials and other) and one industrial metal – aluminium. Most industrial and precious metals, Australian Coal and some other agricultural commodities are located in the second cluster, which contains 18 elements. The last two clusters are quite close to each other. The third consists of US Gas and Sugar UE, while the fourth contains most energy commodities and some food, especially oils (palms, soya, groundnut).

Table 1. The Average Silhouette Width for 2, 3 and 4 Clusters in Different Time Periods

Methods period\ nr cluster	Ward's			Complete			Pam		
	2	3	4	2	3	4	2	3	4
2001–2014	0.235	0.287	0.322	0.605	0.265	0.322	0.274	0.196	0.225
2001–2008	0.374	0.427	0.301	0.746	0.423	0.274	0.382	0.429	0.301
2008–2014	0.371	0.257	0.221	0.378	0.237	0.221	0.338	0.245	0.214

Source: own calculations.

In order to compare the results of classifications, the adjusted rand index is computed (see Table 2). The level of agreement of different classifications and the comparison of clusters and categories of different commodities (listed in the World Bank indices – symbol WB in Table 2) are measured. As there are six different commodity categories, the assumed division of the set of objects also consists of six clusters.

The results obtained reveal that commodity classifications do not determine similar behaviour of commodity prices, which is clearly seen in the low ARI values for the first and the second sub-periods (where the values are the highest) as well as for the whole sample period. As far as various methods of obtaining

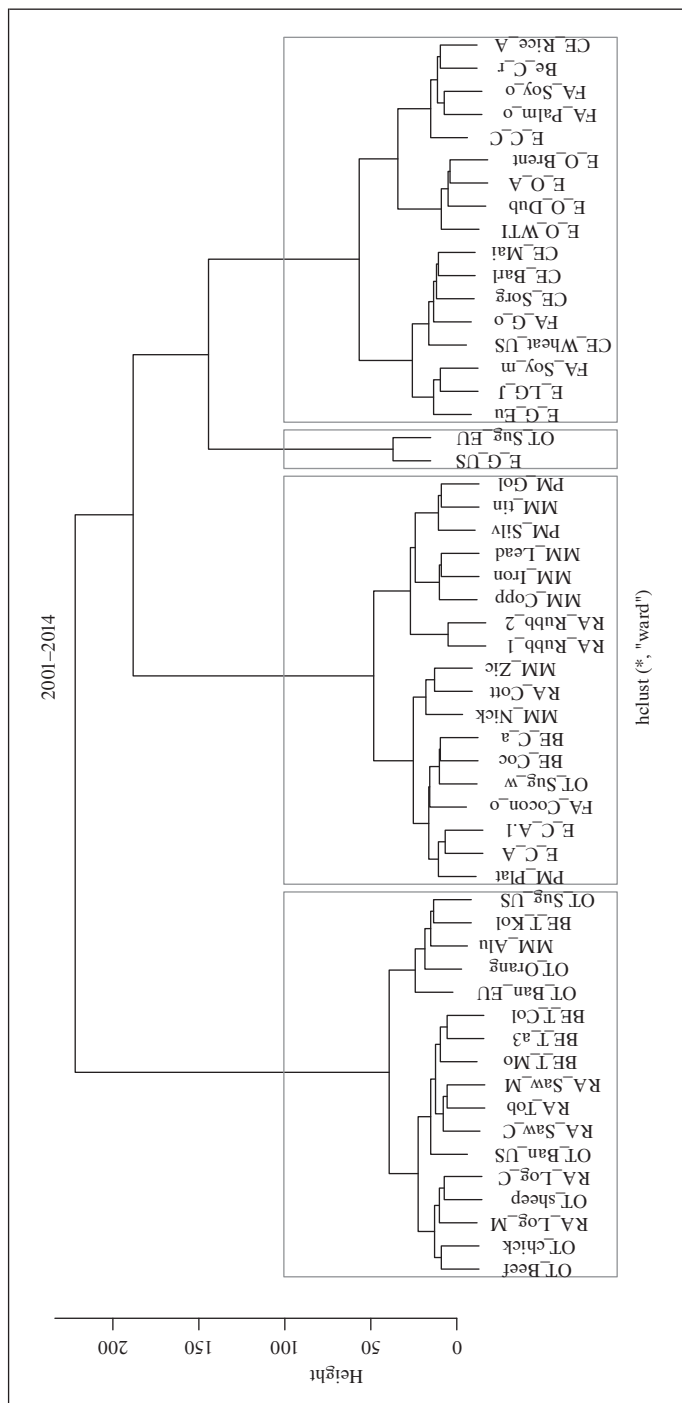


Fig. 3. The Classification Results for the Whole Sample Period

Source: own calculations.

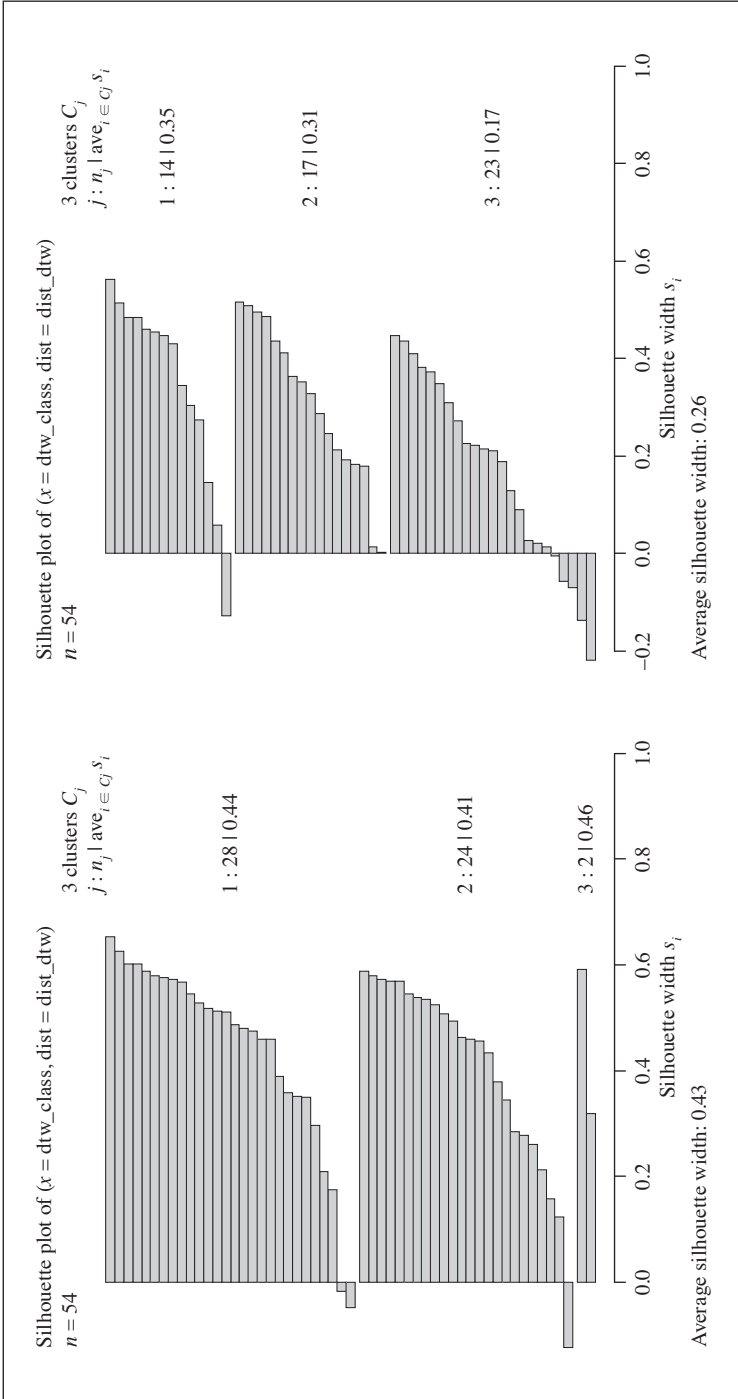


Fig. 4. Silhouette Plots for Pre-crisis (left panel) and Post-crisis (right panel) Period

Source: own calculations.

clusters are concerned, they are relatively high (from 0.467 obtained for pair *complete-ward* in second sub-period to pair *pam-complete* in the first sub-period). Again, higher values of the similarity measure are obtained in the first sub-period, which indicates that in this sub-period co-movement of the indexes is more evident, and is easily detected by different time series classification tools.

Table 2. Adjusted Rand Index for Different Classification Methods

Period	2001–2014			2001–2008			2009–2014		
	WB	Ward	compl.	WB	Ward	compl.	WB	Ward	compl.
WB	1			1			1		
Ward	0.100	1		0.139	1		0.077	1	
compl.	0.123	0.543	1	0.163	0.626	1	0.074	0.467	1
pam	0.167	0.415	0.496	0.125	0.588	0.688	0.114	0.490	0.569

Source: own calculations.

Table 3. Adjusted Rand Index for the Ward Results and Different Periods

Periods	Number of clusters			
	3 clusters		6 clusters	
	2001–2014	2001–2008	2001–2014	2001–2008
2001–2008	0.419	–	0.730	–
2009–2014	0.370	0.064	0.238	0.156

Source: own calculations.

In order to compare the composition of clusters in different periods, the ARI index is computed for 3 and 6 clusters. As Table 3 shows, the results obtained reveal that the composition of clusters in the pre-crisis and post-crisis periods differ greatly (in the division into 3 clusters ARI comes out to 0.064, while into 6 clusters it is 0.156). Relatively strong similarity of cluster composition in the pre-crisis sub-period and the whole period (ARI from 0.419 to 0.73 for 6 clusters) is attributable to the co-movement of all commodity prices in the pre-crisis period being stronger and more evident.

4. Conclusion and Discussion

Dynamic time warping has been used in the study to classify commodity price data in the pre-crisis and post-crisis periods. The results obtained reveal that co-movement of commodity prices is more evident in the pre-crisis period

when the clusters are more homogeneous and consist of commodities from the same category (e.g. precious metals or energy commodities are located in the same cluster). Clusters obtained for the post-crisis period are less homogeneous. The internal classification measure demonstrates that the best division is obtained if only two or three clusters are considered in every period. Clusters obtained for the whole period sample indicate that there are only two patterns of behaviour of prices in the periods analysed (stronger in the first one). Comparing commodity categories with the results of clustering indicates that commodities which belong to a single category do not always behave in the same way. This is especially evident in the second period, when certain energy commodities, metals or precious metals belong to different clusters. The results obtained might be of great importance to investors, as they demonstrate that the co-movement of commodity prices is not currently as evident as it was in the pre-crisis period. Consequently, the correlation between financial instruments is not high, and it is in general much easier to construct low variance portfolios. Moreover, because instruments belonging to the same class do not co-move (e.g. energy resources, metals or precious metals) it is possible to construct a well-diversified portfolio within the class.

To conclude, co-movement of commodity prices has not recently been as evident as it was in the pre-crisis period. What might be the reason for such change in investor behaviour? It may well be due to the disappearance of its causes, which include, according to popular explanations, low interest rates and inflation expectations, shifts in global supply and demand, and the risks resulting from geopolitical uncertainties and speculative bubbles. The first two seem still valid.

In the post-crisis period, real interest rates decreased. The crisis at first caused a dramatic demand slump, which gradually came back to its pre-crisis level. Due to difficulties with direct measuring, it is harder to refer to the remaining two causes of co-movement. It seems probable that the global financial crisis has led to increasing geopolitical risks, so it is justified to assume that co-movement has been caused by speculation. Thus, it is most likely that the crisis has changed investors' behaviour in the long run.

Bibliography

- Alonso A., Berrendero J., Hernandez A., Justel A. (2006), *Time Series Clustering Based on Forecast Densities*, "Computational Statistics & Data Analysis", vol. 51(2): 762–776, <http://dx.doi.org/10.1016/j.csda.2006.04.035>.
- Akram F. Q. (2009), *Commodity Prices, Interest Rates and the Dollar*, "Energy Economics", vol. 31: 838–851.
- Berndt D., Clifford J. (1994), *Using Dynamic Time Warping to Find Patterns in Time Series*, "KDDworkshop", vol. 10, nr 16: 359–370.

- Byrne J. P., Fazio G., Fiess N. (2013), *Primary Commodity Prices: Co-movements, Common Factors and Fundamentals*, "Journal of Development Economics", vol. 101: 16–26, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jdevco.2012.09.002>.
- Frankel J. A. (2008), *The Effect of Monetary Policy on Real Commodity Prices* (in: J. Y. Campbell (ed.), *Asset Prices and Monetary Policy*, NBER Working Paper 12713, University of Chicago, Chicago).
- Gilbert C. L. (2009), *Speculative Influences on Commodity Futures Prices, 2006–2008*, Working Paper, Department of Economics, University of Trento, Trento.
- Grabiński T. (1975), *Dynamiczne modele analizy taksonomicznej*, Doctoral thesis, Akademia Ekonomiczna w Krakowie, Kraków.
- Gohin A., Chantret F. (2010), *The Long-run Impact of Energy Prices on World Agricultural Markets: The Role of Macro-economic Linkages*, "Energy Policy", vol. 38: 333–339, <http://dx.doi.org/10.1016/j.enpol.2009.09.023>.
- Hubert L., Arabie P. (1985), *Comparing Partitions*, "Journal of Classification", vol. 2(1): 193–218, <http://dx.doi.org/10.1007/BF01908075>.
- Irwin S. H., Sanders D. R. (2011), *Index Funds, Financialization, and Commodity Futures Markets*, "Applied Economic Perspectives and Policy", vol. 33: 1–31, <http://dx.doi.org/10.1093/aep/33.1.1>.
- Kaufman L., Rousseeuw P. J. (1990), *Finding Groups in Data: An Introduction to Cluster Analysis*, Wiley & Sons, New York.
- Kilian L. (2008), *Exogenous Oil Supply Shocks: How Big Are They and How Much do They Matter for the US Economy?* "Review of Economics and Statistics", vol. 90: 216–240, <http://dx.doi.org/10.1162/rest.90.2.216>.
- Kilian L. (2009), *Not All Oil Price Shocks Are Alike: Disentangling Demand and Supply Shocks in the Crude Oil Market*, "American Economic Review", vol. 99: 1053–1069, <http://dx.doi.org/10.1257/aer.99.3.1053>.
- Krugman P. (2008), *Commodity Prices*, "NY Times", March 19.
- Kakizawa Y., Shumway R. H., Taniguchi M. (1998), *Discrimination and Clustering for Multivariate Time Series*, "Journal of the American Statistical Association", vol. 93: 328–340.
- Kumar M., Patel N. R. (2007), *Clustering Data with Measurement Errors*, "Computational Statistics and Data Analysis", vol. 51: 6084–6101, <http://dx.doi.org/10.1016/j.csda.2006.12.012>.
- Liao W. T. (2005), *Clustering of Time Series Data – A Survey*, "Pattern Recognition", vol. 38: 1857–1874, <http://dx.doi.org/10.1016/j.patcog.2005.01.025>.
- Natanelov V., Mohammad J., Alam M. J., McKenzie A. M., Huylenbroeck G. V. (2011), *Is There Co-movement of Agricultural Commodities Futures Prices and Crude Oil?* "Energy Policy", vol. 39: 4971–4984, <http://dx.doi.org/10.1016/j.enpol.2011.06.016>.
- Nazlioglu S., Soytaş U. (2012), *Oil Price, Agricultural Commodity Prices, and the Dollar: A Panel Cointegration and Causality Analysis*, "Energy Economics", vol. 34: 1098–1104, <http://dx.doi.org/10.1016/j.eneco.2011.09.008>.
- Papież M., Śmiech S. (2011), *The Analysis of Relations between Primary Fuel Prices on the European Market in the Period 2001–2011*, "Rynek Energii", vol. 5: 139–144.
- Pindyck R. S., Rotemberg J. J. (1990), *The Excess Co-movement of Commodity Prices*, "Economic Journal", vol. 100: 1173–89.

- Phillips P. C. B., Yu J. (2010), *Dating the Timeline of Financial Bubbles during the Subprime Crisis*, Cowles Foundation Discussion Paper No. 1770, Yale University, Yale, <http://dx.doi.org/10.3982/QE82>.
- Svensson L. E. O. (2008), *The Effect of Monetary Policy on Real Commodity Prices: Comment* (in: J. Y. Campbell (ed.), *Asset Prices and Monetary Policy*, NBER Working Paper 12713, University of Chicago, Chicago).

Podobieństwo ścieżek cen towarów na rynkach światowych – analiza na podstawie klasyfikacji szeregów czasowych za pomocą metody dynamic time warping

(Streszczenie)

Wiele czynników powoduje problemy dotyczące modelowania zachowania cen towarów na rynkach światowych. Wśród nich wymienić można różnorodność kategorii towarów – które dodatkowo nie są rozłączne, powiązania cen towarów z różnych kategorii – część towarów może być traktowana jako komplementarne, przyczyny wahań cen towarów. Pewne przyczyny (głównie po stronie popytowej), takie jak aktywność gospodarcza, stopy procentowe czy kursy walut, są wspólne dla wielu kategorii towarów, inne z kolei – związane z podażą – są specyficzne. Mimo to w ostatnich dziesięcioleciach ceny towarów zachowują się podobnie (*co-move*), co doczekało się wielu opracowań.

W pracy przeprowadzono i oceniono grupowanie cen towarów w okresie przed kryzysem oraz po globalnym kryzysie finansowym w celu sprawdzenia, czy ceny towarów przed kryzysem i po kryzysie grupują się w podobne skupiska i czy homogeniczność tych skupisk jest podobna. Analiza została przeprowadzona na danych miesięcznych z okresu styczeń 2001–luty 2014. Wszystkie ceny oraz indeksy cen zaczerpnięto z bazy Banku Światowego. W badaniu wykorzystano metodę *dynamic time warping*, dzięki której wykazano, że wspólne zachowanie cen było silniejsze w okresie przed globalnym kryzysem finansowym. Ustalono także, że liczba skupisk jest niewielka, co oznacza, że można zauważyć tylko kilka tendencji w zakresie zachowania się cen na światowych rynkach towarowych.

Słowa kluczowe: ceny towarów, klasyfikacja szeregów czasowych, *dynamic time warping*, wspólne zachowanie cen.

Grzegorz Tarczyński

Katedra Badań Operacyjnych

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

Algorytm składowania dedykowanego optymalizujący czas kompletacji wyrobów

Streszczenie

Istotnym elementem funkcjonowania magazynów, podlegającym optymalizacji, jest czas kompletacji wyrobów. Może być on minimalizowany poprzez wyznaczenie jak najkrótszej trasy magazyniera, ale również dzięki właściwemu rozmieszczeniu towarów.

W artykule rozważania ograniczono do najpopularniejszych magazynów: prostokątnych, jednoblokowych z kompletacją typu „człowiek do towaru”. Omówione zostały procesy magazynowe i ich wpływ na czas kompletacji wyrobów. Przedstawiona została podstawowa klasyfikacja metod składowania towarów i sposoby wyznaczania trasy magazynierów. Na tym tle zaprezentowano oryginalne metody składowania dedykowanego. Jakość proponowanych metod zweryfikowana została za pomocą symulacji. Otrzymane czasy kompletacji towarów porównano z czasami uzyskanymi dla jednej z metod losowych. Do obliczeń wykorzystano autorski program Warehouse Real-Time Simulator.

Słowa kluczowe: kompletacja wyrobów, magazynowanie, składowanie wyrobów, optymalizacja, symulacje.

1. Wprowadzenie

Kompletacja wyrobów stanowi najbardziej pracochłonny etap procesu magazynowania. Stanowi ona ok. 55% kosztów operacyjnych związanych z funkcjonowaniem magazynu [Bartholdi i Hackman 2011]. Redukcję tych kosztów można więc przeprowadzić poprzez optymalizację procesu kompletacji towarów. W maga-

zynach, w których proces ten przebiega zgodnie z regułą „człowiek do towaru”, zadanie to realizuje się zarówno dzięki wyznaczeniu jak najkrótszej trasy, którą musi przebyć magazynier, pobierając towary, jak i optymalizacji alokacji towarów w magazynie. Drugie zadanie jest bardzo trudne, ale jednocześnie ciekawe dla badaczy, ponieważ dotyczy podejmowania decyzji w warunkach ryzyka i niepewności.

Celem artykułu jest prezentacja oryginalnych algorytmów składowania dedykowanego towarów i zweryfikowanie ich efektywności w połączeniu z popularnymi heurystykami i algorytmem optymalnym służącymi do wyznaczania trasy w magazynie. Zbadane zostanie również, jak wpłynie nagromadzenie towarów szybko rotujących w pewnych obszarach magazynu na powstawanie ewentualnych zatorów spowodowanych jednoczesnym przebywaniem magazynierów w tym samym miejscu.

2. Metody wyznaczania trasy magazyniera

Strefa kompletacji w magazynach może mieć różny kształt. Dla magazynów prostokątnych, tzw. jednoblokowych, czyli takich, gdzie alejki, w których umieszczone są regały z wyrobami, przecięte są tylko dwoma głównymi korytarzami, problem wyznaczania najkrótszej trasy magazyniera został rozwiązany. Często jednak na potrzeby magazynu adaptuje się istniejące już budynki – w tej sytuacji zadanie optymalizacji trasy magazyniera przypomina problem komiwojażera i może być rozwiązywane np. z wykorzystaniem algorytmów genetycznych. Pewna próba rozwiązania tego problemu przedstawiona jest też w pracy A. Sabo [2013], gdzie zastosowano teorię grafów i m.in. użyto minimalne drzewa rozpinające.

W artykule analizę ograniczono do magazynów prostokątnych jednoblokowych ze scentralizowanym punktem przyjęcia i wydania towarów, dla których algorytm wyznaczania najkrótszej trasy podali H.D. Ratliff i A.S. Rosenthal [1983]. Metoda, wykorzystując teorię grafów i programowanie dynamiczne, pozwala na ustalenie najkrótszej trasy magazyniera w bardzo krótkim czasie (czas obliczeń liniowo zależy od liczby alejek w magazynie). Algorytm Ratliffa i Rosenthala uogólniony został przez R. De Koster i E.S. Van Der Poorta [1998] na przypadek zdecentralizowany (wykorzystanie taśmociągów), a przez K.J. Roodbergena i R. De Koster [2001] na przypadek magazynów dwublokowych (trzy główne korytarze). Dla magazynów innego typu znalezienie najkrótszej trasy jest zadaniem trudniejszym i bardziej czasochłonnym.

Pomimo że algorytm wyznaczania trasy optymalnej jest szybki i łatwy do oprogramowania, w praktyce często stosuje się również heurystyki. R. De Koster, T. Le Duc i K.J. Roodbergen [2007] podają trzy przyczyny stosowania heurystyk:

algorytm wyznaczania trasy optymalnej ma zastosowanie tylko dla specyficznego układu strefy kompletacji, najkrótsza trasa wyznaczona przez algorytm często może być przez magazynierów postrzegana za nielogiczną (magazynierzy pewnie poruszają się po stałych trasach) i trasa optymalna (w odróżnieniu od niektórych heurystyk) nie uwzględnia możliwości wystąpienia zatorów w magazynie spowodowanych przez tzw. efekt przepełnienia (*congestion effect*).

W literaturze przedstawionych jest 5 heurystyk, które mają zastosowanie w magazynach prostokątnych jednoblokowych: *s-shape*, *midpoint*, *return*, *largest gap* i *combined*. Szczegółowe opisy zasad wyznaczania trasy dla każdej z nich można znaleźć np. w pracy [Le-Duc 2005].

3. Metody składowania towarów

Ogromny wpływ na czas kompletacji zamówień ma – oprócz ustalenia jak najszybszej trasy poruszania się magazynierów – również sposób rozmieszczenia towarów w magazynie. Problem jest bardzo trudny do rozwiązania, ponieważ dotyczy podejmowania decyzji w warunkach ryzyka i niepewności (nie jest znany przyszły popyt na wyroby). Dodatkowo efekty mogą być oceniane wielokryterialnie: zadanie minimalizacji czasu kompletacji zamówień może stać w sprzeczności z bardziej ogólnym celem, którym jest zmniejszanie łącznych kosztów funkcjonowania magazynu.

Jedną z pierwszych prac dotyczących problemu optymalizacji składowania towarów w magazynie jest artykuł J.L. Hesketta [1963]. Autor zaproponował, aby towary o wysokim współczynniku rotacji i małych gabarytach przechowywać blisko punktu przyjęcia i wydania towarów. W tym celu towary należy posortować rosnąco według tzw. współczynnika COI (*cube-per-order index*) i w takiej kolejności umieszczać na polach odkładczych znajdujących się najbliżej punktu przyjęcia i wydania towarów.

Inną kluczową pracą poruszającą zagadnienia optymalizacji składowania towarów w magazynie jest artykuł C. Kallina i J. Lynn [1976], którzy zaproponowali cztery kryteria (sprowadzone do postaci warunków), które powinny być spełnione podczas rozmieszczania towarów w magazynie:

- kompatybilność (*compatibility*) – towary, które nie są „zgodne”, nie mogą być przechowywane w bezpośrednim sąsiedztwie (np. artykuły spożywcze i ropo-pochodne),

- komplementarność (*complementarity*) – towary komplementarne należy przechowywać w niewielkiej odległości od siebie,

- popularność (*popularity*) – wyroby o dużym współczynniku rotacji powinny być przechowywane w miejscu łatwo dostępnym dla magazyniera,

– przestrzeń (*space*) – towary o małych gabarytach należy przechowywać blisko punktu przyjęcia i wydania towarów.

Na podstawie przedstawionych kryteriów powstało wiele metod składowania towarów. Metody te można podzielić na kilka grup (bardziej szczegółowy opis problemu można znaleźć np. w pracach: [De Koster, Le Duc i Roodbergen 2007, s. 488–491; Wäscher 2004; Huber 2011, s. 14–16; Le Duc 2005, s. 12–17; Roodbergen 2001, s. 14–15]. Przykładowy podział obejmuje następujące metody:

- oparte na składowaniu losowym (*random storage assignment*),
- składowania najbliższej punktu przyjęcia i wydania towarów (*closest-open-location storage assignment*),
- składowania dedykowanego (*dedicated storage assignment*),
- składowania oparte na klasyfikacji ABC (*class-based storage assignment*),
- składowania oparte na grupowaniu towarów (*family-grouping atorage assignment*).

Przedstawiony tutaj (za pracą T. Le Duc [2005]) podział na 5 grup wydaje się najbardziej kompletny. Należy jednak zaznaczyć, że klasy te nie są rozłączne. Niektóre metody składowania można przypisać do kilku grup.

W dalszej części artykułu skupiono się przede wszystkim na metodach składowania dedykowanego opartych na grupowaniu towarów często pojawiających się na zamówieniach razem.

4. Propozycja metod wykorzystujących warunkowe rozkłady prawdopodobieństwa zakupu towarów

Uwzględnienie w rozważaniach teoretycznych wszystkich postulatów C. Kalliny i J. Lynna jest bardzo trudne. Proponowane metody biorą pod uwagę komplementarność i popularność. Dla pozostałych kryteriów przyjmuje się założenie, że są one spełnione.

Kolejnym problemem, zaniechanym przez wielu autorów, jest wyznaczenie czasu kompletacji. W większości prac przyjmowane jest założenie, że czas kompletacji jest proporcjonalny do długości drogi pokonanej przez magazyniera (por. np. [Wäscher 2004, De Koster, Le Duc i Roodbergen 2007]). Łatwo jednak wykazać, że nie zawsze tak jest ([De Koster, Van Der Poort i Roodbergen 1998, Tarczyński 2013]). Autor w przeprowadzanych badaniach będzie analizował czas kompletacji.

Pełna lista założeń do proponowanych modeli przedstawia się następująco:

- analiza ograniczona została do magazynów prostokątnych, jednoblokowych,
- punkt przyjęcia i wydania towarów znajduje się w „południowo-zachodnim” rogu magazynu,

- kompletacja wykonywana jest metodą „człowiek do towaru”,
- kompletacja wykonywana jest z wykorzystaniem wózków widłowych [Fijałkowski 2003] (tabela 1),
- analizowany jest czas kompletacji, zamiast długości drogi pokonywanej przez magazyniera,
- wielkość, ciężar i ilość pobieranych przedmiotów są nieistotne i nie wpływają na prędkość poruszania się magazyniera (postulat przestrzeni nie jest brany pod uwagę),
- czas pobrania wszystkich wyrobów jest taki sam,
- wszystkie towary są kompatybilne,
- liczba towarów w magazynie równa jest liczbie pól odkładczych,
- równocześnie pracuje kilku magazynierów, co umożliwia sprawdzenie, czy w magazynie nie powstają zatory.

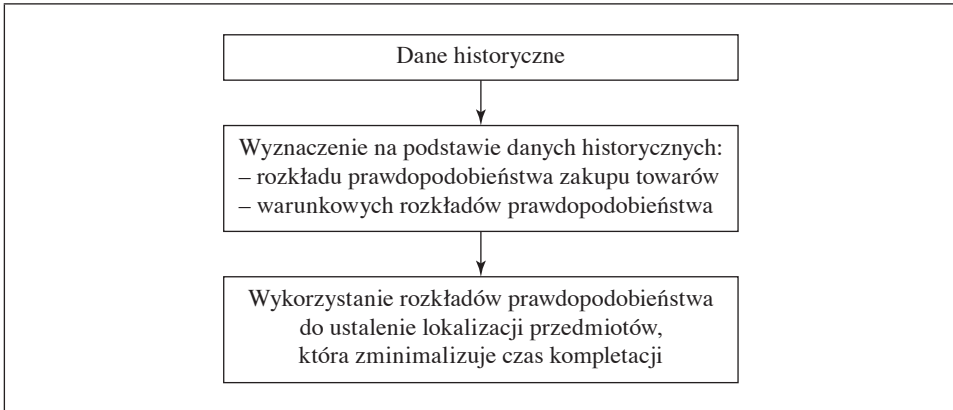
Tabela 1. Czasy poruszania się wózków widłowych

Czynność	Symbol	Jednostka	Czas (min)
Przyspieszenie po zatrzymaniu (pusty wózek)	AE	cały okres	0,0300
Przyspieszenie po zatrzymaniu (pełny wózek)	AL	cały okres	0,0300
Prędkość (3 km/h) – pełny wózek	FL	na jeden metr	0,0200
Prędkość (3 km/h) – pusty wózek	FE	na jeden metr	0,0200
Zatrzymanie (pusty wózek)	SE	cały okres	0,0200
Zatrzymanie (wózek pełen)	SL	cały okres	0,0360
Skręt w lewo (przy ruchu do przodu)	TFL	cała operacja	0,0550
Skręt w prawo (przy ruchu do przodu)	TFR	cała operacja	0,0550
Nałożenie palety na widły	NP	cała operacja	0,1333
Zeskanowanie oraz odłożenie towaru na paletę	CP	cała operacja	0,1733
Odłożenie pełnej palety na pole odkładcze	OP	cała operacja	0,2000
Ofoliowanie gotowej palety wydrukowanie i naklejenie etykiety	OFP	cała operacja	0,3533
Zatrzymanie pełnego wózka	–	cała operacja	0,0360
Cofanie (0,8 m)	–	na 0,8m	0,0750

Źródło: opracowanie własne na podstawie: [Fijałkowski 2003].

Problem alokacji towarów w magazynie dotyczy podejmowania decyzji w warunkach ryzyka i niepewności. W proponowanych metodach, na podstawie danych historycznych, wyznaczone będą rozkłady prawdopodobieństwa zakupu towarów przez klientów oraz warunkowe rozkłady prawdopodobieństwa informujące o tym, jak często towary kupowane są w zestawach. W przypadku bardzo dużych zbiorów danych historycznych wykonanie niezbędnych obliczeń może

być trudne i może wymagać wykorzystania technik zgłębiania danych. Uzyskane rozkłady prawdopodobieństwa posłużą do ustalenia lokalizacji towarów w magazynie zgodnie z kryteriami komplementarności i popularności podanymi przez C. Kallinę i J. Lynna [1976] (rys. 1).



Rys. 1. Schemat postępowania przy ustalaniu lokalizacji towarów w magazynie

Źródło: opracowanie własne.

Zaproponowane metody stanowią modyfikację popularnej metody składowania losowego opartego na klasyfikacji ABC: metody *across-aisle* (rys. 2a). W metodzie tej towary o wysokim współczynniku rotacji umieszcza się blisko tego głównego korytarza, w którym znajduje się punkt przyjęcia i wydania towarów. Towary słabo rotujące lokowane są blisko drugiego głównego korytarza. Oryginalna metoda *across-aisle* stanowić będzie też punkt wyjścia przy porównywaniu efektywności proponowanych metod.

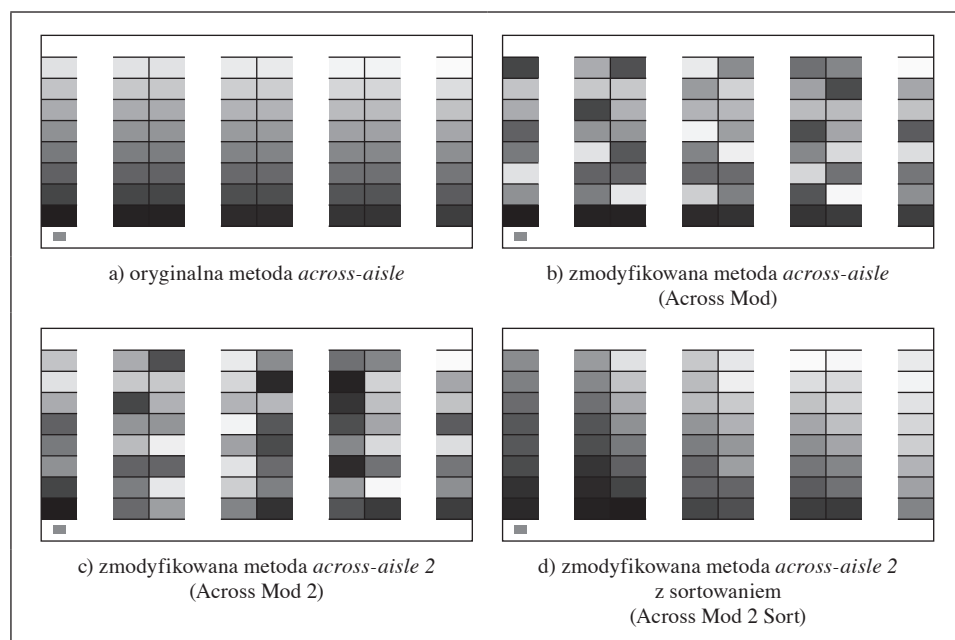
Proponowane modyfikacje metody *across-aisle*:

– zmodyfikowana metoda *across-aisle* (Across Mod): towary na podstawowym poziomie składowania w pierwszym rzędzie (najbliższym głównemu korytarzowi, w którym znajduje się punkt przyjęcia i wydania towarów) umieszcza się tak, jak w oryginalnej metodzie *across-aisle*. Pozostałe wyroby umieszcza się w bocznych alejkach, dla których $P(B|A)P(A)$ jest największe ($P(A)$ – prawdopodobieństwo wystąpienia na zamówieniu towaru A, który został już ulokowany w pierwszym kroku algorytmu; $P(B|A)$ – prawdopodobieństwo pojawienia się na zamówieniu klienta towaru B, jeśli klient zamawia towar A) (rys. 2b);

– zmodyfikowana metoda *across-aisle* 2 (Across Mod 2): warunkowe prawdopodobieństwa są sortowane, następnie grupuje się towary, dla których wartości warunkowych prawdopodobieństw są najwyższe. Procedurę powtarza się, aż

wszystkie towary zostaną przypisane do grup. Jedna grupa może zawierać tylko tyle elementów, ile jest pól odkładczych w bocznej alejce (rys. 2c);

– zmodyfikowana metoda *across-aisle 2* z sortowaniem (Across Mod 2 sort): po zastosowaniu metody Across Mod 2 towary są sortowane w ramach grup – towary o najwyższych współczynnikach rotacji umieszcza się blisko tego głównego korytarza, w którym znajduje się punkt przyjęcia i wydania towarów. Następnie sortowane są całe grupy – grupy zawierające towary, dla których suma współczynników rotacji jest największa umieszcza się blisko punktu przyjęcia i wydania towarów (rys. 2d).



Rys. 2. Wizualizacja propozycji metod składowania towarów (skala szarości pól odkładczych informuje o wartości współczynnika rotacji – na polach ciemniejszych znajdują się towary najczęściej zamawiane i kompletowane)

Źródło: opracowanie własne.

5. Wyniki obliczeń

Algorytmy przetestowano na pięciu zbiorach danych:

1) magazyn jednopoziomowy, warunkowe prawdopodobieństwa zakupu towarów są bliskie zeru (towary nie są kupowane w zestawach),

2) magazyn jednopoziomowy, niektóre warunkowe prawdopodobieństwa zakupu towarów są znacząco większe od zera (towary są czasami kupowane w zestawach),

3) magazyn jednopoziomowy, wiele warunkowych prawdopodobieństw zakupu towarów jest znacząco większych od zera (towary są często kupowane w zestawach),

4) magazyn pięciopoziomowy, niektóre warunkowe prawdopodobieństwa zakupu towarów są znacząco większe od zera (towary są rzadko kupowane w zestawach),

5) magazyn jednopoziomowy, zbiór danych rzeczywistych pochodzących z dużego centrum dystrybucji pewnej sieci spożywczej.

Do obliczeń wykorzystano program Warehouse Real-Time Simulator [Tarczyński 2013]. Zastosowanie symulacji jest dość czasochłonne, umożliwia jednak przeprowadzenie dokładniejszej i pełniejszej analizy niż w przypadku rozwiązań teoretycznych z użyciem wzorów matematycznych. W obliczeniach przyjęto następujące założenia:

- 200 replikacji dla każdego doświadczenia (1 replikacja odpowiadała 1 dniowi pracy magazynu),

- zamówienia napływają do magazynu przez 8 godzin, ale magazyn pracuje dłużej – do momentu, aż skompletowane zostanie ostatnie zamówienie,

- zmienna liczba towarów na zamówieniach (maksymalnie 12 towarów na zamówieniu),

- ponad 18 800 zamówień dla każdego doświadczenia,

- około 150 000–204 000 towarów (indeksów) pobranych w ramach każdego doświadczenia,

- zamówienia napływały zgodnie z rozkładem wykładniczym (podobnie, jak ma to miejsce w systemach kolejkowych) dla średnich wartości podanych w tabeli 2.

Tabela 2. Średni odstęp czasu pomiędzy dwoma zamówieniami

Przedział czasu	Średni czas napływania zamówień
8:00–9:00	03:31
9:00–10:00	04:15
10:00–11:00	04:01
11:00–12:00	06:59
12:00–14:00	10:12
14:00–15:00	05:01
15:00–16:00	04:05
Cały dzień (8:00–16:00)	06:02

Źródło: opracowanie własne.

Wyniki przeprowadzonych symulacji zaprezentowane są jako średnie czasy kompletacji zamówień i procentowa zmiana w porównaniu z metodą *across-aisle* (tabele 3–7). Wartości ponad 100% oznaczają pogorszenie średnich czasów kompletacji względem metody *across-aisle*, w przeciwnym wypadku – skrócenie czasu.

Dla pierwszego eksperymentu proponowane metody nie spowodowały poprawy czasów kompletacji zamówień. Metoda *across-aisle mod* w połączeniu z heurystyką *midpoint* spowodowała nawet 2% wydłużenie średniego czasu kompletacji. Wyniki takie nie są zaskoczeniem, ponieważ w tym eksperymencie towary w ogóle nie były kupowane w zestawach.

Tabela 3. Średnie czasy kompletacji zamówień dla eksperymentu 1

Metoda wyznaczenia trasy	Metoda składowania			
	<i>across-aisle</i>	<i>across-aisle mod</i>	<i>across-aisle mod 2</i>	<i>across-aisle mod 2 sort</i>
<i>Optimal</i>	0:14:05 (100%)	0:14:02 (100%)	0:14:00 (99%)	0:14:01 (100%)
<i>S-Shape</i>	0:16:08 (100%)	0:16:06 (100%)	0:15:58 (99%)	0:15:58 (99%)
<i>Midpoint</i>	0:15:19 (100%)	0:15:15 (100%)	0:15:15 (100%)	0:15:16 (100%)
<i>Return</i>	0:18:12 (100%)	0:18:31 (102%)	0:18:24 (101%)	0:18:13 (100%)
<i>Largest Gap</i>	0:14:54 (100%)	0:14:52 (100%)	0:14:50 (100%)	0:14:53 (100%)
<i>Combined</i>	0:15:03 (100%)	0:15:01 (100%)	0:14:57 (99%)	0:14:57 (99%)

Źródło: opracowanie własne.

Zbiór danych użyty w drugim eksperymencie uwzględnił już – choć nieczęsto – możliwość zakupu towarów w zestawach. Tutaj proponowane algorytmy spowodowały zmniejszenie średnich czasów kompletacji zamówień. Najlepszą poprawę zaobserwowano dla metody *across-aisle mod 2* i heurystyki *s-shape*: czas kompletacji uległ redukcji o 17%. Dodatkowe posortowanie towarów w ramach metody *across-aisle mod 2 sort* spowodowało dalszą niewielką poprawę wyników: o 1 punkt procentowy. Podobne wyniki uzyskano dla trzeciego zbioru danych. Tutaj metody *across-aisle mod 2* i *across-aisle mod 2 sort* w połączeniu z heurystyką *s-shape* spowodowały skrócenie czasu kompletacji o odpowiednio 18% i 19%.

Tabela 4. Średnie czasy kompletacji zamówień dla eksperymentu 2

Metoda wyznaczenia trasy	Metoda składowania			
	<i>across-aisle</i>	<i>across-aisle mod</i>	<i>across-aisle mod 2</i>	<i>across-aisle mod 2 sort</i>
<i>Optimal</i>	0:14:26 (100%)	0:13:35 (94%)	0:13:02 (90%)	0:13:00 (90%)
<i>S-Shape</i>	0:18:21 (100%)	0:16:17 (89%)	0:15:09 (83%)	0:15:07 (82%)
<i>Midpoint</i>	0:15:26 (100%)	0:14:39 (95%)	0:14:18 (93%)	0:14:16 (92%)
<i>Return</i>	0:17:22 (100%)	0:17:21 (100%)	0:16:35 (95%)	0:16:15 (94%)
<i>Largest Gap</i>	0:15:14 (100%)	0:14:25 (95%)	0:13:55 (91%)	0:14:00 (92%)
<i>Combined</i>	0:15:39 (100%)	0:14:47 (94%)	0:14:05 (90%)	0:14:01 (90%)

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 5. Średnie czasy kompletacji zamówień dla eksperymentu 3

Metoda wyznaczenia trasy	Metoda składowania			
	<i>across-aisle</i>	<i>across-aisle mod</i>	<i>across-aisle mod 2</i>	<i>across-aisle mod 2 sort</i>
<i>Optimal</i>	0:13:41 (100%)	0:12:28 (91%)	0:11:47 (86%)	0:11:44 (86%)
<i>S-Shape</i>	0:15:48 (100%)	0:14:03 (89%)	0:12:56 (82%)	0:12:52 (81%)
<i>Midpoint</i>	0:14:47 (100%)	0:13:40 (92%)	0:12:51 (87%)	0:12:56 (87%)
<i>Return</i>	0:16:01 (100%)	0:15:28 (97%)	0:14:26 (90%)	0:13:55 (87%)
<i>Largest Gap</i>	0:14:23 (100%)	0:13:19 (93%)	0:12:30 (87%)	0:12:38 (88%)
<i>Combined</i>	0:14:22 (100%)	0:13:11 (92%)	0:12:19 (86%)	0:12:15 (85%)

Źródło: opracowanie własne.

W czwartym eksperymencie proponowane metody składowania również spowodowały poprawę czasów kompletacji zamówień, choć tym razem niewielką. Warto jednak zwrócić uwagę, że metoda *across-aisle* w połączeniu z heurystyką *return* spowodowała 2% pogorszenie wyników.

Tabela 6. Średnie czasy kompletacji zamówień dla eksperymentu 4

Metoda wyznaczenia trasy	Metoda składowania			
	<i>across-aisle</i>	<i>across-aisle mod</i>	<i>across-aisle mod 2</i>	<i>across-aisle mod 2 sort</i>
<i>Optimal</i>	0:23:24 (100%)	0:22:46 (97%)	0:22:17 (95%)	0:22:29 (96%)
<i>S-Shape</i>	0:25:49 (100%)	0:25:10 (97%)	0:24:55 (97%)	0:24:33 (95%)
<i>Midpoint</i>	0:25:43 (100%)	0:24:59 (97%)	0:24:33 (95%)	0:24:59 (97%)
<i>Return</i>	0:28:26 (100%)	0:28:58 (102%)	0:28:07 (99%)	0:27:18 (96%)
<i>Largest Gap</i>	0:24:59 (100%)	0:24:16 (97%)	0:23:53 (96%)	0:24:18 (97%)
<i>Combined</i>	0:24:31 (100%)	0:24:11 (99%)	0:23:41 (97%)	0:23:28 (96%)

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 7. Średnie czasy kompletacji zamówień dla eksperymentu 5

Metoda wyznaczenia trasy	Metoda składowania			
	<i>across-aisle</i>	<i>across-aisle mod</i>	<i>across-aisle mod 2</i>	<i>across-aisle mod 2 sort</i>
<i>Optimal</i>	0:13:46 (100%)	0:13:08 (95%)	0:12:48 (93%)	0:12:45 (93%)
<i>S-Shape</i>	0:15:59 (100%)	0:14:57 (94%)	0:14:19 (90%)	0:14:15 (89%)
<i>Midpoint</i>	0:14:56 (100%)	0:14:16 (96%)	0:14:09 (95%)	0:14:08 (95%)
<i>Return</i>	0:16:32 (100%)	0:16:37 (101%)	0:16:03 (97%)	0:15:50 (96%)
<i>Largest Gap</i>	0:14:35 (100%)	0:13:56 (96%)	0:13:43 (94%)	0:13:47 (95%)
<i>Combined</i>	0:14:38 (100%)	0:13:58 (95%)	0:13:33 (93%)	0:13:30 (92%)

Źródło: opracowanie własne.

Ekspertyment przeprowadzony na piątym, rzeczywistym zbiorze danych także potwierdził skuteczność proponowanych metod składowania w redukcji czasu kompletacji. Najlepszy wynik uzyskano ponownie dla heurystyki *s-shape* i metody *across-aisle mod 2 sort*: nastąpiła 11% redukcja czasu. Podobnie, jak w eksperym-

mencie 4, także tutaj metoda *across-aisle mod* w połączeniu z heurystyką *return* spowodowała niewielki (o 1%) wzrost średniego czasu kompletacji zamówień.

Tabela 8. Średnie czasy wzajemnego blokowania się magazynierów podczas kompletacji jednego zamówienia dla eksperymentu 2

Metoda wyznaczenia trasy	Metoda składowania			
	<i>aisle across</i>	<i>aisle across mod</i>	<i>aisle across mod 2</i>	<i>aisle across mod 2 sort</i>
<i>Optimal</i>	0:02:08 (100%)	0:01:57 (91%)	0:01:56 (91%)	0:02:01 (95%)
<i>S-Shape</i>	0:01:52 (100%)	0:01:56 (103%)	0:02:02 (108%)	0:01:55 (103%)
<i>Midpoint</i>	0:02:43 (100%)	0:02:20 (86%)	0:02:27 (90%)	0:02:35 (95%)
<i>Return</i>	0:03:51 (100%)	0:03:43 (96%)	0:03:37 (94%)	0:03:42 (96%)
<i>Largest Gap</i>	0:02:38 (100%)	0:02:13 (84%)	0:02:19 (88%)	0:02:35 (98%)
<i>Combined</i>	0:02:22 (100%)	0:02:08 (90%)	0:02:08 (90%)	0:02:08 (90%)

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 8 przedstawia średnie dzienne czasy blokowania się magazynierów dla drugiego eksperymentu. Jak widać, wartości są stosunkowo niewielkie. Tylko w połączeniu z heurystyką *s-shape* proponowane metody składowania towarów spowodowały wzrost częstości występowania sytuacji wzajemnego blokowania się przez magazynierów (do 8%). Dla pozostałych heurystyk i dla trasy optymalnej, sytuacja uległa poprawie (nawet do 16%). Dla pozostałych eksperymentów sytuacja wyglądała podobnie: średnie łączne czasy blokowania się wózków widłowych były niewielkie.

6. Wnioski

W artykule przedstawiono oryginalne metody składowania dedykowanego towarów i zweryfikowano ich efektywność na pięciu zbiorach danych. W sytuacji, gdy towary były rzeczywiście często kompletowane w typowych zestawach, proponowane metody uzyskiwały lepsze wyniki od porównywanej metody *across-aisle*. Gdy towary nie były zamawiane i kompletowane w zestawach, średnie czasy kompletacji uzyskane dla metody *across-aisle* i zaproponowanych jej modyfikacji były zbliżone. Niekiedy nawet wyniki dla proponowanych metod

były nieco gorsze, ale różnica była bardzo mała. W analizowanych przykładach składowanie dedykowane towarów nie doprowadziło do efektu przepełnienia i poważnych zatorów mogących utrudnić pracę w magazynie.

Spośród metod składowania losowego towarów opartych na klasyfikacji ABC, oprócz metody *across-aisle* na uwagę zasługuje metoda diagonal – niekiedy daje ona lepsze rezultaty.

Istnieje możliwość wykorzystania proponowanych algorytmów w praktyce. Wprawdzie G. Wäscher [2004] zwraca uwagę na trudności z wdrożeniem algorytmów dedykowanych, to zdaniem autora w pewnym ograniczonym zakresie możliwe jest ich zastosowanie. Niezbędne jest jednak uwzględnienie wszystkich kryteriów C. Kalliny i J. Lynna [1976].

Literatura

- Bartholdi III J.J., Hackman S.T. [2011], *Warehouse and Distribution Science*, Georgia Institute of Technology, Atlanta.
- De Koster R., Le Duc T., Roodbergen K.J. [2007], *Design and Control of Warehouse Order Picking: A Literature Review*, „European Journal of Operational Research”, vol. 182(2), <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2006.07.009>.
- De Koster R., Van Der Poort E.S. [1998], *Routing Order Pickers in a Warehouse: A Comparison between Optimal and Heuristic Solutions*, „IIE Transactions”, vol. 30, <http://dx.doi.org/10.1023/A:1007599307171>.
- De Koster R., Van Der Poort E.S., Roodbergen K.J. [1998], *When to Apply Optimal or Heuristic Routing for Orderpickers* [w:] *Advances in Distribution Logistics*, red. B. Fleischmann, J.A.E.E. van Nunen, M.G. Speranza, P. Stähly, Springer, Berlin, http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-46865-0_16.
- Fijałkowski J. [2003], *Transport wewnętrzny w systemach logistycznych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
- Heskett J.L. [1963], *Cube-per-order Index – a Key to Warehouse Stock Location*, „Transport and Distribution Management”, nr 3.
- Huber Ch. [2011], *Throughput Analysis of Manual Order Picking Systems with Congestion Consideration*, KIT Scientific Publishing, Karlsruhe.
- Kallina C., Lynn J. [1976], *Application of the Cube-per-order Index Rule for Stock Location in a Distribution Warehouse*, „Interfaces”, vol. 7(1), <http://dx.doi.org/10.1287/inte.7.1.37>.
- Le-Duc T. [2005], *Design and Control of Efficient Order Picking Processes*, Erasmus University Rotterdam, Rotterdam.
- Ratliff H.D., Rosenthal A.S. [1983], *Order-picking in a Rectangular Warehouse: A Solvable Case of the Traveling Salesman Problem*, „Operations Research”, vol. 31(3), <http://dx.doi.org/10.1287/opre.31.3.507>.
- Roodbergen K.J. [2001], *Layout and Routing Methods for Warehouses*, Erasmus University Rotterdam, Rotterdam.

- Roodbergen K.J., De Koster R. [2001], *Routing Order Pickers in a Warehouse with a Middle Aisle*, „European Journal of Operational Research”, vol. 133(1), [http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217\(00\)00177-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(00)00177-6).
- Sabo A. [2013], *Analiza problemu kompletacji zamówień w magazynie wysokiego składowania* [w:] *Decyzje optymalne w wybranych obszarach praktyki gospodarczej*, red. T. Trzaskalik, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice.
- Tarczyński G. [2013], *Warehouse Real-Time Simulator – How to Optimize Order Picking Time*, Working Paper, SSRN: <http://ssrn.com/abstract=2354827>, <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2354827>.
- Wäscher G. [2004], *Order Picking: A Survey of Planning Problems and Methods* [w:] *Supply Chain Management and Reverse Logistics*, eds. M. Dyckhoff, R. Lackes, J. Reese, Springer, Berlin–New York, http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-24815-6_15.

A Dedicated Storage Location Assignment Algorithm that Optimises Order-picking Time

(Abstract)

An essential element of warehouse work which can be optimised is order-picking time. It can be minimised by determining the shortest picker's route and the appropriate storage location assignment of items.

In this paper only one-block rectangular warehouses with picker-to-part order picking systems are considered. The warehouse processes are presented. The routing heuristics and the optimal algorithm and storage location assignment methods are described. Against this background the original dedicated storage location assignment algorithms are presented. The efficiency of the methods is verified using simulations. For the calculations the original software Warehouse Real-Time Simulator is used.

Keywords: order-picking, warehousing, storage location assignment, optimisation, simulations.

Monika Miśkiewicz-Nawrocka

Katarzyna Zeug-Żebro

Katedra Matematyki

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Ocena stopnia zagrożenia bezrobociem województw Polski w latach 2005–2012

Streszczenie

Zjawisko bezrobocia obserwuje się w sytuacji, w której ludność zdolna do pracy oraz deklarująca gotowość i chęć jej podjęcia nie znajduje zatrudnienia. Rosnący od 2009 r. poziom bezrobocia stanowi jeden z najbardziej istotnych i trudnych do rozwiązania problemów polskiej gospodarki. Wynika on między innymi z przekształceń gospodarczych, wzrastającego postępu techniczno-organizacyjnego w sferze produkcji, upadku całych gałęzi przemysłu, a także z braku odpowiednich kwalifikacji, braku doświadczenia zawodowego, niewielkiej mobilności ludności oraz wysokim kosztem dojazdu do pracy. Ze względu na długoterminowość tego zjawiska można obserwować negatywny wpływ na standard życia ludności, dynamikę rozwoju gospodarczego oraz nastroje społeczne.

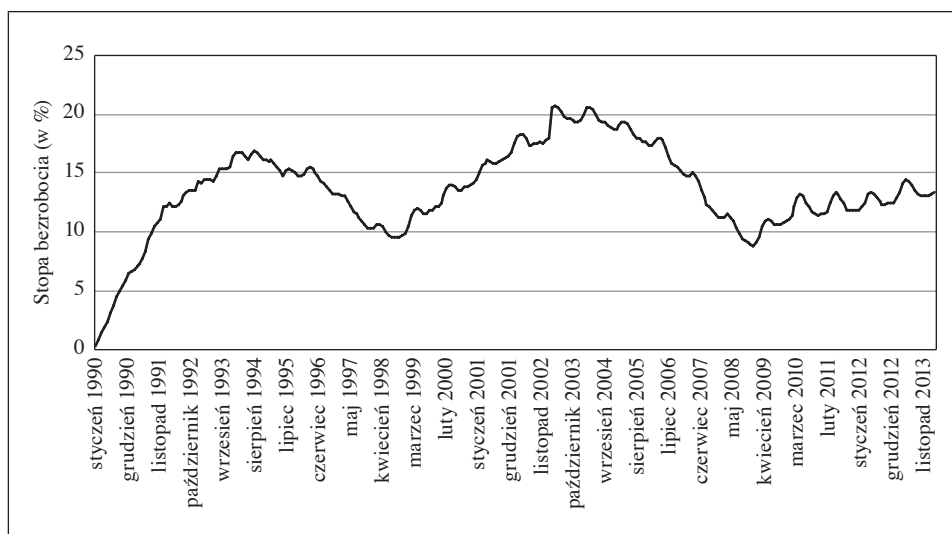
Celem artykułu jest ocena zagrożenia bezrobociem województw Polski w latach 2005–2012. W badaniach wykorzystano dane pochodzące z Banku Danych Lokalnych GUS-u (www.stat.gov.pl).

Słowa kluczowe: miary taksonomiczne, stopa bezrobocia, klasyfikacja obiektów, analiza przestrzenna.

1. Wprowadzenie

Bezrobocie ze względu na swoje następstwa jest jednym z najtrudniejszych problemów społeczno-gospodarczych. Zjawisko bezrobocia obserwuje się

w sytuacji, w którym ludność zdolna do pracy oraz deklarująca gotowość i chęć jej podjęcia nie znajduje zatrudnienia [Kwiatkowski 2002]. Rosnąca od 2009 r. wartość stopy bezrobocia w Polsce (rys. 1) stanowi trudny do rozwiązania problem polskiej gospodarki. Wynika on między innymi z przekształceń gospodarczych, wzrastającego postępu techniczno-organizacyjnego w sferze produkcji, upadku całych gałęzi przemysłu, a także z braku odpowiednich kwalifikacji i doświadczenia zawodowego, niewielkiej mobilności ludności oraz wysokich kosztów dojazdu do pracy [Dragan 2012]. Ze względu na długoterminowość tego zjawiska można obserwować negatywny wpływ na standard życia ludności, dynamikę rozwoju gospodarczego oraz nastroje społeczne.



Objaśnienie: daty ujęte na rys. 1 są miesięcznymi wartościami stopy bezrobocia, które zostały wyznaczone automatycznie co 11 miesięcy za pomocą programu Excel.

Rys. 1. Miesięczne wartości stopy bezrobocia w Polsce w latach 1990–2013

Źródło: opracowanie własne.

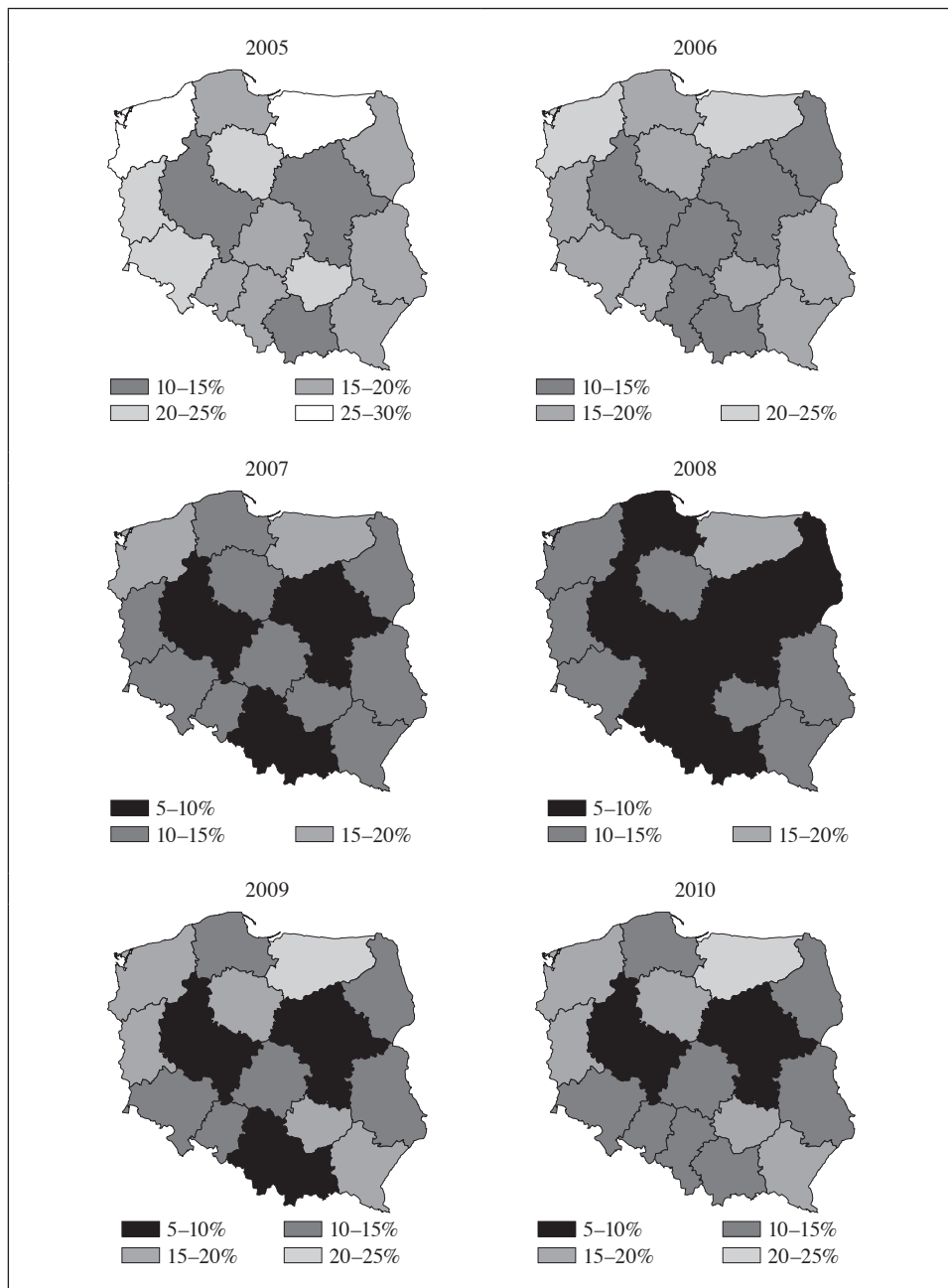
Celem artykułu jest ocena stopnia zagrożenia bezrobociem województw Polski w latach 2005–2012 za pomocą wybranych miar taksonomicznych. W badaniach wykorzystano metody: miary rozwoju Z. Hellwiga [1968], miary syntetycznej D. Strahl [1978], absolutnego miernika rozwoju M. Cieślak [1974] oraz miary bezwzorcowej. W analizach uwzględniono dane pochodzące z Banku Danych Lokalnych GUS-u (www.stat.gov.pl). Wszystkie obliczenia i mapy wykonano w programie R oraz pakiecie Microsoft Excel.

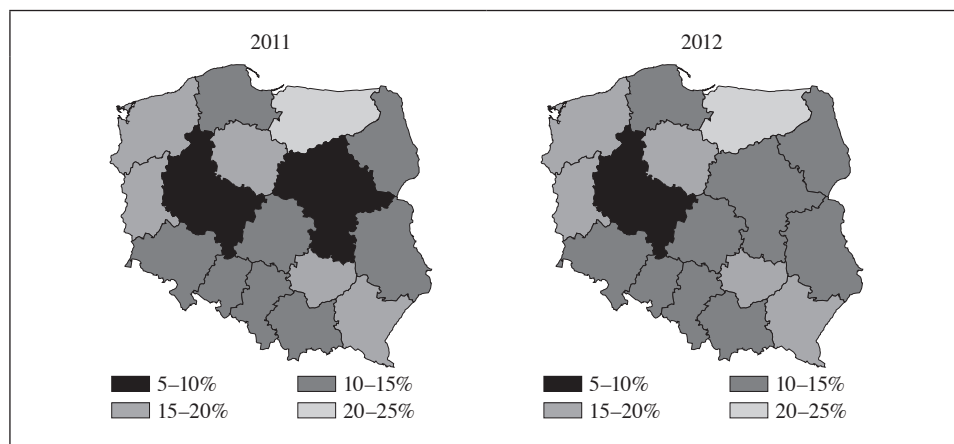
2. Zmiany stopy bezrobocia w Polsce w latach 2005–2012

W początkowych latach rozważanego okresu w wielu województwach Polski obserwowano spadek stopy bezrobocia. W szczególności w 2005 r. najniższą stopą bezrobocia (poniżej 15%) charakteryzowały się województwa mazowieckie, małopolskie i wielkopolskie (rys. 2), zaś najwyższą (powyżej 25%) zachodniopomorskie i warmińsko-mazurskie. W kolejnym roku do województw o najniższej wartości tego wskaźnika dołączyły województwa łódzkie, śląskie i podlaskie. W 2007 r. w prawie wszystkich województwach stopa bezrobocia była niższa niż 15% (z wyjątkiem województw zachodniopomorskiego i warmińsko-mazurskiego), a w województwach mazowieckim, małopolskim, wielkopolskim i śląskim spadła do poziomu niższego niż 10%. Wraz z kolejnym rokiem przybywa województw, w których wartość stopy bezrobocia należy do przedziału od 5–10% (łódzkie, opolskie, podlaskie, pomorskie). Należy również zauważyć, że w 2008 r. we wszystkich województwach stopa bezrobocia uległa znacznemu obniżeniu. Od 2009 r. sytuacja na rynku pracy ulegała pogorszeniu i nie zmieniała się aż do 2012 r. Warto jednak podkreślić, że mimo ciągłego wzrostu bezrobocia, wartości jego wskaźnika w 2012 r. były niższe niż w 2005 r.

3. Dobór cech diagnostycznych do oceny stopnia zagrożenia bezrobociem

Przedmiotem badań była ocena stopnia zagrożenia bezrobociem wszystkich województw Polski w latach 2005–2012. Wyboru zmiennych pozwalających na tę ocenę dokonano tak, aby ostateczny zbiór cech pozwolił ustalić, które województwa należą do grupy o wysokim, średnim i niskim stadium zagrożenia tym zjawiskiem. W tabeli 1 przedstawiono zestaw cech diagnostycznych branych pod uwagę w badaniu, wyróżniając wśród nich stymulanty (S) i destymulanty (D). Podziału cech na stymulanty i destymulanty dokonano z wykorzystaniem współczynnika korelacji liniowej, obliczanym pomiędzy poszczególnymi zmiennymi a stopą bezrobocia. Wybrane zmienne diagnostyczne charakteryzują pewne grupy określające różne dziedziny życia społecznego, tj. stan ludności, rynek pracy, szkolnictwo wyższe, wynagrodzenia, wydatki budżetów województw, gospodarstwa domowe, migrację, łączność, produkcję sprzedaną i nakłady inwestycyjne. Dobór poniższych miar wynikał z analizy czynników determinujących poziom zagrożenia bezrobociem.





Rys. 2. Zmiany stopy bezrobocia w województwach Polski w latach 2005–2012

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 1. Zestaw zmiennych diagnostycznych w badaniu stopnia zagrożenia bezrobociem województw Polski

Symbol	Zmienna	Charakter zmiennej
X1	Kobiety w wieku produkcyjnym (%)	S
X2	Mężczyźni w wieku produkcyjnym (%)	S
X3	Ludność na wsi w wieku produkcyjnym (%)	S
X4	Ludność w mieście w wieku produkcyjnym (%)	S
X5	Ludność aktywna zawodowo z wykształceniem wyższym (%)	D
X6	Ludność aktywna zawodowo z wykształceniem policealnym oraz średnim zawodowym (%)	D
X7	Ludność aktywna zawodowo z wykształceniem średnim ogólnym (%)	D
X8	Ludność aktywna zawodowo z wykształceniem zasadniczym zawodowym (%)	D
X9	Ludność aktywna zawodowo z wykształceniem gimnazjalnym, podstawowym i niższym (%)	S
X10	Absolwenci szkół wyższych na 10 tys. ludności	D
X11	Przeciętne miesięczne wynagrodzenie brutto	D
X12	Przeciętne miesięczne wydatki na edukację	D
X13	Wydatki na oświatę i wychowanie	D
X14	Wyposażenie w komputer osobisty z dostępem do Internetu w gospodarstwie domowym	D

cd. tabeli 1

Symbol	Zmienna	Charakter zmiennej
X15	Osoby w wieku 18–59 lat mieszkające w gospodarstwach domowych bez osób pracujących (%)	S
X16	Warunki pracy – zagrożenia związane ze środowiskiem pracy	D
X17	Okres poszukiwania pracy/ bezrobotni długotrwale powyżej 13 miesięcy – kobiety	D
X18	Okres poszukiwania pracy/ bezrobotni długotrwale powyżej 13 miesięcy – mężczyźni	D
X19	Wskaźnik zatrudnienia kobiet w wieku produkcyjnym (%)	D
X20	Wskaźnik zatrudnienia mężczyzn w wieku produkcyjnym (%)	D
X21	Wskaźnik zatrudnienia ludności z wykształceniem wyższym (%)	D
X22	Wskaźnik zatrudnienia ludności z wykształceniem policealnym oraz średnim zawodowym (%)	D
X23	Wskaźnik zatrudnienia ludności z wykształceniem średnim ogólnym (%)	D
X24	Wskaźnik zatrudnienia ludności z wykształceniem zasadniczym zawodowym (%)	D
X25	Wskaźnik zatrudnienia ludności z wykształceniem gimnazjalnym, podstawowym i niższym (%)	S
X26	Wskaźnik zatrudnienia ludności w mieście (%)	D
X27	Wskaźnik zatrudnienia ludności na wsi (%)	D
X28	Współczynnik aktywności zawodowej kobiet w wieku produkcyjnym (%)	D
X29	Współczynnik aktywności zawodowej mężczyzn w wieku produkcyjnym (%)	D
X30	Osoby dorosłe w wieku 25–64 lata uczestniczące w kształceniu i szkoleniu (%)	D
X31	Produkcja sprzedana przemysłu na 1 mieszkańca (wskaźnik rozwoju przemysłowego)	D
X32	Saldo migracji wewnętrznych i zagranicznych na pobyt stały ludności w wieku produkcyjnym (wskaźnik atrakcyjności regionu)	D
X33	Długość dróg publicznych o twardej nawierzchni na 100 km ² (w km) – (wskaźnik rozwoju transportu)	D
X34	Nakłady inwestycyjne na 1 mieszkańca	D
X35	Gęstość zaludnienia na 1 km ²	D

Źródło: opracowanie własne.

Do dalszej analizy wybrano zmienne, dla których współczynnik zmienności $V_z > 10\%$. Dodatkowo, stosując metodę parametryczną Z. Hellwiga [1981], wyeliminowano zmienne silnie skorelowane z innymi cechami, tj. te zmienne, które są nośnikami podobnych informacji. Pozwoliło to wyłonić zmienne centralne oraz

satelitarne. Ze względu na nieznaczne różnice występujące w zbiorach zmiennych centralnych w kolejnych latach jako zestaw finalny cech diagnostycznych rozpatrywany w latach 2005–2012 wybrano zmienne centralne wytypowane w 2012 r. W skład finalnego zbioru zmiennych diagnostycznych weszły: X6, X7, X8, X10, X11, X15, X16, X17, X25. Cechy te charakteryzują różne grupy, tj. X6, X7, X8 – stan ludności, X10 – szkolnictwo, X11 – wynagrodzenie, X15 – gospodarstwa domowe, X16, X17, X25 – rynek pracy.

4. Wybrane miary taksonomiczne

Głównym powodem szacowania miar taksonomicznych jest porządkowanie obiektów ze względu na poziom wielocechowego zjawiska. Różnice, jakie dostrzega się w konstrukcji tych miar, dotyczą głównie [Krakowiak-Bal 2005]: sposobu uwzględnienia cech stymulant (S) i destymulant (D), wyboru formuły normalizacyjnej, określenia wartości cech „wzorca”, budowy i własności miary.

Miara rozwoju Z. Hellwiga. Taksonomiczna miara rozwoju Z. Hellwiga [1968], jedna z najstarszych metod wzorcowych, wykorzystuje miary pozycyjne do porządkowania linowego obiektów. W pierwszym etapie konstruowania wzorca rozwoju przeprowadza się standaryzację cech diagnostycznych według formuły:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j}, \quad (1)$$

a następnie wyznacza się współrzędne punktu $Z = (z_{01}, z_{02}, \dots, z_{0m})$ zgodnie ze wzorem:

$$z_{0j} = \begin{cases} \max_i z_{ij}; & j \in S \\ \min_i z_{ij}; & j \in D \end{cases} \quad (2)$$

gdzie: S oznacza zbiór stymulant, zaś D destymulant. W kolejnym kroku oblicza się odległości euklidesowe pomiędzy poszczególnymi obiektami a przyjętym punktem Z :

$$m_{i0} = \left[\sum_{j=0}^m (z_{ij} - z_{0j})^2 \right]^{0.5}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Obliczone wartości m_{i0} służą do obliczenia wartości syntetycznej miary rozwoju Hellwiga według wzoru:

$$m_i = 1 - \frac{m_{i0}}{m_0}, \quad (4)$$

gdzie:

$$m_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_{i0} + 2 \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(m_{i0} - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_{i0} \right) \right)^2 \right]^{0.5}. \quad (5)$$

Miara Hellwiga zwykle przyjmuje wartości z przedziału $[0, 1]$. Jednak w przypadku, gdy obiekt charakteryzowany jest wielkościami cech znacząco różniącymi się od wartości obiektu wzorcowego, może przyjąć wartości ujemne [Panek 2009]. Wyższe wartości tej miary oznaczają wyższy poziom rozwoju badanego obiektu.

Miara syntetyczna D. Strahl. Kolejnym zastosowanym w badaniach miernikiem taksonomicznym jest miara syntetyczna zaproponowana w 1978 r. przez D. Strahl [1978]. Jej wartości można obliczyć za pomocą następującego wzoru:

$$m_i = \sum_{j=1}^m x'_{ij} = \sum_{j=1}^{m_1} x'^S_{ij} + \sum_{j=1}^{m_2} x'^D_{ij}, \quad (6)$$

gdzie:

$$x'^S_{ij} = \frac{x_{ij}}{\max_i x_{ij}}, \quad \text{gd } x_{ij} \text{ jest wartością stymulnty,} \quad (7)$$

$$x'^D_{ij} = \frac{\min_i x_{ij}}{x_{ij}}, \quad \text{gd } x_{ij} \text{ jest wartością destymulnty.} \quad (8)$$

Bezwzorcowa miara rozwoju. Bezwzorcową miarę syntetyczną szacuje się jako średnią arytmetyczną cech x'_{ij} :

$$m_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x'_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

gdzie x'_{ij} – wartością j -tej cechy po przeprowadzeniu unitaryzacji według wzoru:

$$x'_{ij} = \frac{x_{ij} - \min_i x_{ij}}{\max_i x_{ij} - \min_i x_{ij}}, \quad \text{gd } x_{ij} \text{ jest wartością stymulnty,} \quad (10)$$

$$x'_{ij} = \frac{\max_i x_{ij} - x_{ij}}{\max_i x_{ij} - \min_i x_{ij}}, \quad \text{gd } x_{ij} \text{ jest wartością destymulnty.} \quad (11)$$

Absolutny miernik rozwoju według M. Cieślak. Absolutny miernik rozwoju [Cieślak 1974] jest miarą bezwzorcową wyrażoną wzorem:

$$m_i = \sum_{j=1}^m x'_{ij}, \quad (12)$$

gdzie x'_{ij} – unormowana wartość cechy według wzoru:

$$x'_{ij} = \frac{x_{ij}}{s_j}, \quad \text{gd } x_{ij} \text{ jest wartością stymulnty,} \quad (13)$$

$$x'_{ij} = \frac{x_{ij}^*}{s_j^*}, \quad \text{gd } x_{ij} \text{ jest wartością destymulnty,} \quad (14)$$

$$x_{ij}^* = \frac{1}{x_{ij}},$$

s_j – odchylenie standardowe j -tej cechy, s_j^* – odchylenie standardowe j^* tej cechy.

5. Analiza stopnia zagrożenia bezrobociem

W celu uporządkowania wszystkich województw, ze względu na stopień zagrożenia bezrobociem, wykorzystano miarę rozwoju Z. Hellwiga, syntetyczną miarę rozwoju D. Strahl, miarę bezwzorcową oraz absolutny miernik rozwoju. Aby przeprowadzić analizę porównawczą stopnia zagrożenia bezrobociem w województwach Polski w latach 2005–2012, zmienne diagnostyczne poddano normalizacji stałymi w czasie parametrami normalizacyjnymi. Na rys. 3 przedstawiono graficzną ilustrację rankingów ustaloną na podstawie oszacowanych dla każdego województwa wartości wyżej wymienionych miar taksonomicznych w latach 2005–2012. Miejsce ze względu na miarę zostało przypisane zgodnie z zasadą: im większa wartość miernika, tym niższy numer w rankingu.

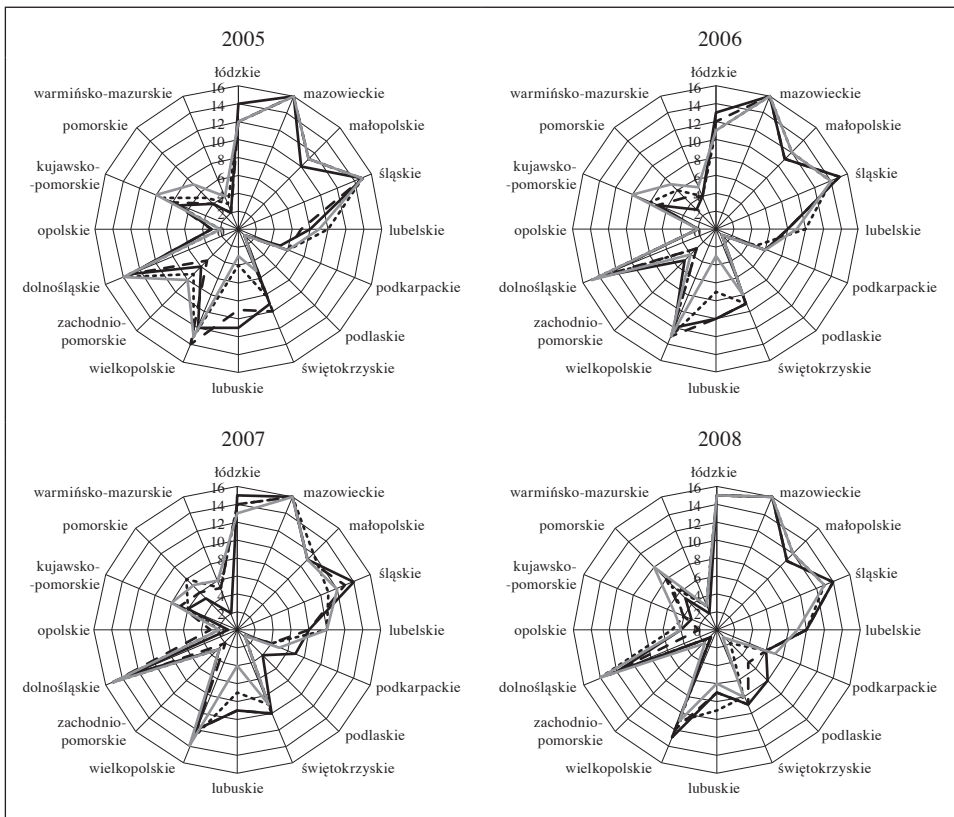
Analizując rezultaty porządkowania (rys. 3), można stwierdzić, że tylko województwo mazowieckie zajęło to samo miejsce (16.) pod względem wszystkich czterech miar w badanym okresie. Wyjątek stanowiły lata 2010 i 2011 (miara bezwzorcową i miara rozwoju Z. Hellwiga). W latach 2005–2012 zdecydowanie najmniej zagrożone bezrobociem okazały się: województwo mazowieckie, a następnie województwa śląskie, łódzkie i dolnośląskie, natomiast najbardziej – województwa: warmińsko-mazurskie, zachodniopomorskie i podlaskie, które zajmowały miejsca 1–4.

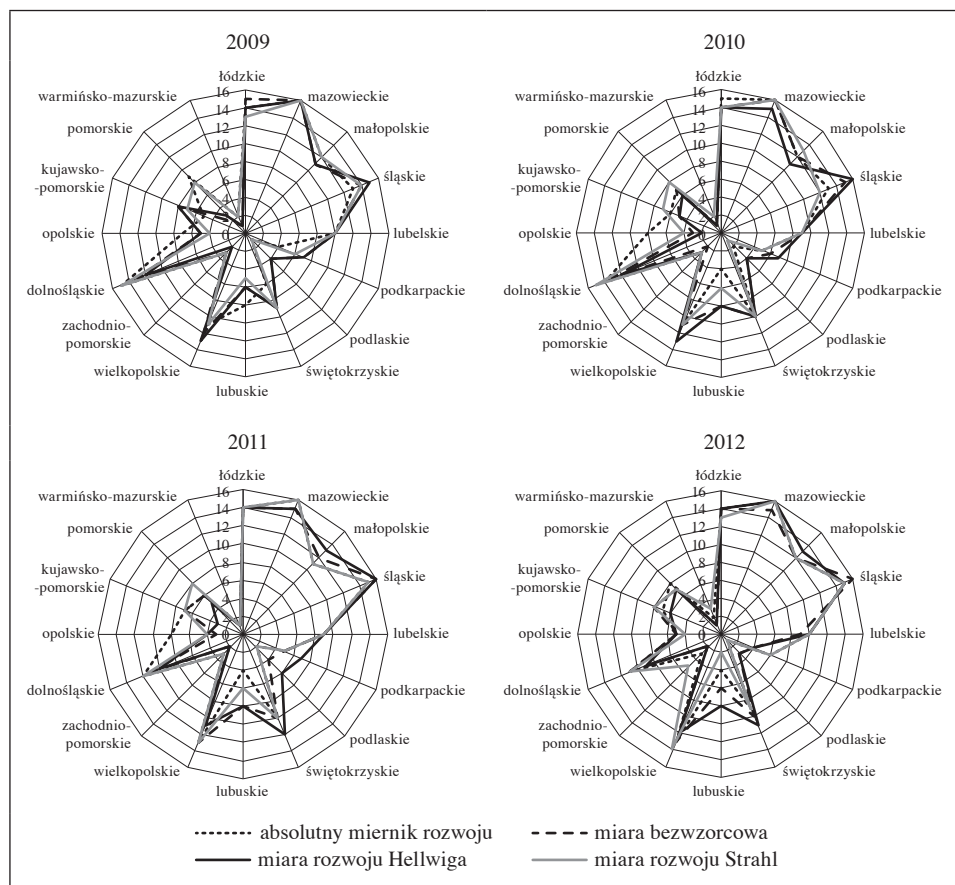
Przeprowadzone badania pozwoliły również na ocenę zmian w czasie wszystkich mierników. Pozytywne zmiany rozwoju zjawiska zagrożenia bezrobociem z wykorzystaniem miary Hellwiga zaobserwowano w województwach małopolskim i pomorskim. Dość wysoką dynamikę poziomu zagrożenia bezrobociem odnotowano również w województwach lubelskim, podlaskim, świętokrzyskim i opolskim. Województwa te polepszyły swoje pozycje w rankingu. Zdecydowanie pogorszyła się sytuacja rozwoju tego zjawiska w województwach zachodniopomorskim, dolnośląskim i lubelskim. Najbardziej stabilna sytuacja w tym zakresie wystąpiła w województwach: mazowieckim, śląskim, łódzkim, wielkopolskim i warmińsko-mazurskim. Województwa te albo w ogóle nie zmieniały miejsca w rankingu (z 2012 r. w porównaniu z 2005 r.), albo w latach 2006–2011 nieznacznie go polepszyły lub pogorszyły.

Poziom zagrożenia bezrobociem określany za pomocą miary Strahl w województwach: śląskim, lubuskim i łódzkim charakteryzował się nagłymi zmianami. W latach 2006–2010 obserwowano w tych województwach pogorszenie (śląskie) lub polepszenie (łódzkie i lubuskie) miejsca w rankingu w stosunku do 2005 r., po czym sytuacja w 2012 r. wracała do stanu początkowego (tj. do poziomu z 2005 r.) lub uległa poprawie. Nieznaczną zmianę na lepsze w rozwoju zjawiska zagrożenia bezrobociem odnotowano w województwach świętokrzyskim i opolskim, zaś pogorszenie sytuacji obserwowano w województwach zachodniopomorskim,

dolnośląskim i kujawsko-pomorskim. W pozostałych województwach obserwowano stabilizację.

Na podstawie rankingu województw ze względu na stopień zagrożenia bezrobociem, stworzonego na podstawie absolutnego miernika rozwoju również można zaobserwować różnorodne zmiany w poszczególnych województwach. Największymi wahaniami poziomu zagrożenia bezrobociem w latach 2005–2012 charakteryzowały się województwa: lubuskie, zachodniopomorskie, opolskie, kujawsko-pomorskie, pomorskie i warmińsko-mazurskie. Najbardziej stabilną sytuacją w badanym okresie odnotowano w województwach: mazowieckim, małopolskim, lubelskim oraz podlaskim. W 2012 r. w województwach łódzkim, małopolskim, świętokrzyskim, opolskim i pomorskim zaobserwowano poprawę sytuacji w porównaniu z rankingiem z 2005 r., natomiast pogorszenie w badanym okresie odnotowano w województwach zachodniopomorskim, dolnośląskim, kujawsko-pomorskim i warmińsko-mazurskim.





Rys. 3. Miejsca w rankingu województw według rozważanych miar taksonomicznych w latach 2005–2012

Źródło: opracowanie własne.

Analizując rankingi województw w latach 2005–2012, uzyskane za pomocą miary bezwzorcowej najbardziej stabilną sytuację za względu na poziom zagrożenia bezrobociem odnotowano w województwach: mazowieckim, małopolskim oraz świętokrzyskim. W pozostałych województwach obserwowano dużą dynamikę w poszczególnych latach badanego okresu. Pozytywne zmiany dotyczące zagrożenia bezrobociem można zauważyć w województwach: łódzkim, małopolskim, śląskim, lubelskim, podlaskim, opolskim oraz pomorskim. Najmniej korzystną sytuację można odnotować w województwach podkarpackim, lubuskim, zachodniopomorskim i dolnośląskim, dla których odnotowano pogorszenie miejsca w rankingu w 2012 r. w stosunku do 2005 r.

Tabela 2. Wartości miary zgodności uporządkowania województw Polski w latach 2005–2012 wyznaczone za pomocą współczynnika korelacji rang Spearmanna

	Absolutny miernik rozwoju	Miara rozwoju Hellwiga	Miara syntetyczna Strahl	Absolutny miernik rozwoju	Miara rozwoju Hellwiga	Miara syntetyczna Strahl
	2005			2006		
Bezwzorcowa miara rozwoju	0,9250	0,9719	0,8531	0,9688	0,9844	0,8906
Absolutny miernik rozwoju	1	0,8906	0,9719	1	0,9438	0,9594
Miara rozwoju Hellwiga	0,8906	1	0,8188	0,9438	1	0,8656
	2007			2008		
Bezwzorcowa miara rozwoju	0,9656	0,9375	0,9344	0,9563	0,9594	0,9469
Absolutny miernik rozwoju	1	0,9031	0,9688	1	0,9094	0,9625
Miara rozwoju Hellwiga	0,9031	1	0,8688	0,9094	1	0,8531
	2009			2010		
Bezwzorcowa miara rozwoju	0,8406	0,9906	0,9063	0,9156	0,9813	0,9438
Absolutny miernik rozwoju	1	0,8438	0,9406	1	0,8719	0,9563
Miara rozwoju Hellwiga	0,8438	1	0,9125	0,8719	1	0,9000
	2011			2012		
Bezwzorcowa miara rozwoju	0,9219	0,9438	0,9719	0,9688	0,9719	0,9313
Absolutny miernik rozwoju	1	0,8625	0,9625	1	0,9406	0,9781
Miara rozwoju Hellwiga	0,8625	1	0,8938	0,9406	1	0,8813

Źródło: opracowanie własne.

W kolejnym kroku badań wyznaczono miarę zgodności uporządkowania województw Polski. W tym celu posłużono się współczynnikiem korelacji rang Spearmanna. Wyniki badania zależności pomiędzy pozycjami województw ze względu na stopień badanego zjawiska przedstawiono w tabeli 2.

Wartości przedstawione w powyższej tabeli wskazują na silną korelację pomiędzy zajmowanymi miejscami województw oszacowanych wybranymi miarami w poszczególnych latach, oznacza to dużą zgodność uporządkowania województw ze względu na stopień zagrożenia bezrobociem według wybranych miar (81–100%). Najwyższą zgodność uporządkowania województw we wszystkich latach można obserwować dla miejsc oszacowanych za pomocą bezwzorcowej miary rozwoju i miary Hellwiga (powyżej 93% w każdym roku badanego okresu) oraz absolutnego miernika rozwoju i miary Sthral (powyżej 94% w każdym roku badanego okresu).

Rezultaty uzyskane w wyniku porządkowania liniowego obiektów wybranymi miarami taksonomicznymi stanowiły podstawę klasyfikacji województw, ze względu na jednorodne grupy, z punktu widzenia osiągniętego stopnia badanego zjawiska (tj. zagrożenia bezrobociem). Całkowity przedział zmienności miar podzielono na cztery przedziały klasowe, do których przypisano poszczególne województwa, według następujących reguł:

I grupa (wysoki stopień zagrożenia bezrobociem): $\bar{m} + S_m \leq m_i$,

II grupa (średni stopień zagrożenia bezrobociem): $\bar{m} \leq m_i < \bar{m} + S_m$,

III grupa (niski stopień zagrożenia bezrobociem): $\bar{m} - S_m \leq m_i < \bar{m}$,

IV grupa (bardzo niski stopień zagrożenia bezrobociem): $m_i < \bar{m} - S_m$,

gdzie: $\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i$, $S_m = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m})^2}$.

Za takim podejściem przemawiał głównie fakt, że ten sposób podziału jest w praktyce badawczej bardzo często stosowany [Kuc 2012; *Taksonomiczna analiza...* 2000]. Wyniki przestrzennego rozmieszczenia uzyskanych grup w latach 2005, 2008 i 2012 przedstawiono na rys. 4.

Klasyfikując województwa na grupy o różnym stopniu zaawansowania badanego zjawiska dla wybranych miar taksonomicznych można zauważyć, że najniższy poziom zagrożenia bezrobociem w rozpatrywanym przedziale czasowym występuje w województwach mazowieckim, śląskim i łódzkim, najwyższy zaś w województwach: podlaskim, warmińsko-mazurskim, zachodniopomorskim i opolskim. Województw wielkopolskie i podkarpackie w całym badanym okresie należały do tych samych przedziałów klasowych. Przypisanie do grup pozostałych województw zmieniało się w czasie i w zależności od przyjętej miary.

Porównując rezultaty uzyskane dla stopy bezrobocia w województwach Polski (rys. 2) z klasyfikacją tych województw według grup stopnia zagrożenia bezrobociem (rys. 4) w latach 2005 i 2008, można zauważyć pewne zbieżności przestrzennego rozmieszczenia najniższej i najwyższej stopy bezrobocia i klasy o niskim i wysokim stopniu zagrożenia bezrobociem. Dotyczyło to głównie województw: mazowieckiego i warmińsko-mazurskiego. W 2012 r. zbieżność tych wyników nie była już tak jednoznaczna.





Rys. 4. Przestrzenne rozmieszczenie województw Polski według klas stopnia zagrożenia bezrobociem w latach 2005, 2008 i 2012 dla: (a) miary Hellwiga, (b) syntetycznej miary Strahl, (c) absolutnego miernika rozwoju według Cieślak, (d) miary bezwzorcowej. Źródło: opracowanie własne.

6. Podsumowanie

Celem artykułu była ocena stopnia zagrożenia bezrobociem województw Polski w latach 2005–2012. W badaniach posłużono się wybranymi miarami taksonomicznymi. Przeprowadzona analiza porównawcza województw jest istotna dla określenia dystansu dzielącego poszczególne województwa pod względem badanego zjawiska oraz do wyodrębnienia grup województw o zbliżonym stopniu zagrożenia bezrobociem.

Z przeprowadzonej analizy rozwoju tego zjawiska wynika, że w latach 2005–2012 zdecydowanie najniższym poziomem zagrożenia bezrobociem charakteryzowało się województwo mazowieckie, kolejnymi były województwa łódzkie, małopolskie i śląskie, natomiast najwyższe zagrożenie bezrobociem obserwowano w województwie zachodniopomorskim i warmińsko-mazurskim. Ponadto województwo mazowieckie zajęło to samo miejsce pod względem wszystkich czterech miar. Pozostałe województwa zmieniają miejsca w czasie i w zależności od przyjętej miary. Oznacza to, że porównywanie stopnia zagrożenia bezrobociem przez wybrane miary nie jest najlepszym rozwiązaniem.

Ogólnie można jednak twierdzić, że ze względu na ekonomiczno-społeczno-polityczne znaczenie zjawiska bezrobocia należy kontynuować tego typu badania. Można sądzić, że w przyszłości zróżnicowanie stopnia zagrożenia bezrobociem w poszczególnych województwach Polski będzie ulegało zmniejszeniu, natomiast nastąpi większe zróżnicowanie na poziomie powiatów. Warto zatem byłoby w kolejnych badaniach prowadzić analizy tego zjawiska w mniejszych jednostkach terytorialnych.

Literatura

- Cieślak M. [1974], *Taksonomiczna procedura prognozowania rozwoju gospodarczego i określenia potrzeb na kadry kwalifikowane*, „Przegląd Statystyczny”, z. 1.
- Dragan A. [2012], *Programy walki z bezrobociem na poziomie Unii Europejskiej i w wybranych państwach – Polsce, Finlandii, Irlandii i Niemczech*, Kancelaria Senatu, Warszawa.
- Hellwig Z. [1968], *Zastosowanie metody taksonomicznej do typologicznego podziału krajów ze względu na poziom ich rozwoju i strukturę wykwalifikowanych kadr*, „Przegląd Statystyczny”, nr 15(4).
- Hellwig Z. [1981], *Wielowymiarowa analiza porównawcza i jej zastosowanie w badaniach wielocechowych obiektów gospodarczych [w:] Metody i modele ekonomiczno-matematyczne w doskonaleniu zarządzania gospodarką socjalistyczną*, red. W. Welfe, PWE, Warszawa.
- Krakowiak-Bal A. [2005], *Wykorzystanie wybranych miar syntetycznych do budowy miary rozwoju infrastruktury technicznej*, „Infrastruktura i Ekologia Terenów Wiejskich”, nr 3.

- Kwiatkowski E. [2002], *Bezrobocie: podstawy teoretyczne*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Kuc M. [2012], *The Implementation of Synthetic Variable for Constructing the Standard of Living Measure in European Union Countries*, *Oeconomia Copernicana*, nr 3, Polskie Towarzystwo Ekonomiczne Oddział w Toruniu.
- Panek T. [2009], *Statystyczne metody wielowymiarowej analizy porównawczej*, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Warszawa.
- Strahl D. [1978], *Propozycja konstrukcji miary syntetycznej*, „Przegląd Statystyczny”, z. 2. *Taksonomiczna analiza przestrzennego zróżnicowania poziomu życia w Polsce w ujęciu dynamicznym* [2000], red. A. Zeliaś, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.

Assessment of the Threat of Unemployment in Poland's Voivodships in the Years 2005–2012

(Abstract)

Unemployment is observed when an individual is able to work and declares his or her readiness and willingness to take employment yet is not employed. Since 2008, rising unemployment has been one of the most important and difficult problems facing the Polish economy. On one hand, Poland's unemployment has stemmed from economic transformation, technical and organisational progress in the sphere of production, and the collapse of entire industries. On the other, the lack of qualifications and experience, low job mobility and high commuting costs are also to blame. Due to its long-term nature, it has adversely affected the Poland's standard of living, the dynamics of economic development and sentiments in society.

The main aim of this article is to assess the threat of unemployment Poland's voivodships faced in the years 2005–2012. The study employs a number of taxonomic measures and uses data from the Local Data Bank of the Central Statistical Office.

Keywords: taxonomic measures, unemployment rate, classification of objects, spatial analysis.